Master 2 Agrégation, Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,
UE3 - 9 - **EDO Linéaires.**

Exercice 1 (Base de solutions)

Pour $t > -1/2$, considérons l'équation différentielle suivante

$$(2t+1)x'' - (4t^2+1)x' - (4t^2+2t+2)x = 0.$$

Montrer que $x_1(t) = e^{-t}$ et $x_2(t) = e^{t^2}$ sont deux solutions indépendantes de cette équation différentielle. En déduire toutes les solutions sur $]-1/2, +\infty[$.

Exercice 2 (Méthode de variation de la constante)

Résoudre dans $\mathbb{K}$ les équations différentielles suivantes en utilisant la méthode de variation de la constante.

$$\begin{array}{rc} 1) & y' - y = t, \\ 2) & y' + 2y = e^t, \\ 3) & y' + ty = t, \\ 4) & y' + y = \cos(t), \\ 5) & y' + y = e^{-t}. \end{array}$$

Exercice 3 (Systèmes)

Résoudre dans $\mathbb{K}$ les systèmes d'équations différentielles suivants

$$1) \left\{ \begin{array}{l} x' = x + 3y, \\ y' = 4x + 2y, \end{array} \right. \qquad 2) \left\{ \begin{array}{l} x' = 2x - 5y, \\ y' = 2x - 4y, \end{array} \right. \qquad 3) \left\{ \begin{array}{l} x' = 5x - y, \\ y' = x + 3y, \end{array} \right.$$

en calculant des exponentielles de matrices.

Exercice 4 (Systèmes avec second membre)

Résoudre dans $\mathbb{K}$ les systèmes d'équations différentielles suivants

$$1) \left\{ \begin{array}{l} x' = 2x - y - 5t, \\ y' = 3x + 6y - 4, \end{array} \right. \qquad 2) \left\{ \begin{array}{l} x' = -y + \cos t - t, \\ y' = -x - \sin t. \end{array} \right.$$

Pour le premier système, en calculant une exponentielle de matrices. Pour le second système, en se ramenant à une équation sur x.

Exercice 5 (Besoin ou non de calculer P^{-1})

1) Résoudre dans $\mathbb{K}$ le système d'équation différentielle suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = 2x + y, \\ y' = -4x - 3y, \end{array} \right.$$

sans calculer P^{-1}, c'est-à-dire donner une base de solutions (sans que la forme obtenue soit directement utilisable pour un problème de Cauchy).

2) Résoudre dans $\mathbb{K}$ le système précédent d'équation différentielle, avec la donnée de Cauchy $x(2) = 1$ et $y(2) = -3$.

Exercice 6 (Ordre n scalaire)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations différentielles

$$\begin{array}{rc} 1) & y^{(3)} - 2y'' - 5y' + 6y = 0, \\ 2) & y^{(3)} - 2y'' - 7y' - 4y = 0, \\ 3) & y^{(4)} + 2y'' + y = 0, \\ 4) & y^{(4)} - y^{(3)} + 4y'' - 4y' = 0, \\ 5) & y^{(5)} - 4y^{(4)} + 4y^{(3)} = 0. \end{array}$$

Exercice 7 (Solution particulière)

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations différentielles

$$y'' - y = g_i \qquad (E_i)$$

avec

$$g_1(t) = t, \quad g_2(t) = e^t, \quad g_3(t) = e^{2t}, \quad g_4(t) = e^{-t} + e^{2t}.$$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations différentielles

$$y'' + y = g_i \qquad (E_i)$$

avec

$$g_1(t) = 1, \quad g_2(t) = \cos(t), \quad g_3(t) = \cos(2t), \quad g_4(t) = \cos(t) + \cos(2t),$$

$$g_5(t) = \sin^2(t), \quad g_6(t) = \sin^3(t), \quad g_7(t) = t^2, \quad g_8(t) = t^2 \sin t, \quad g_9(t) = e^t \cos t.$$

Dans les cas 1, 2, 3 et 5, on commencera par la méthode avec la recherche d'une solution particulière d'une forme donnée puis on retrouvera le résultat en utilisant la méthode de la variation de la constante.

Exercice 8 (Zéros isolés)

Soit l'équation différentielle $(\mathcal{E}) : y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ avec $p, q \in C(I, \mathbb{R})$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Montrer que les zéros d'une solution non nulle y de $(\mathcal{E})$ sont isolés. Cette solution n'a donc qu'un nombre fini de zéros sur tout compact de I.

Exercice 9 (Théorèmes d'oscillation-comparaison de Sturm)

1) Soit l'équation différentielle $(\mathcal{E}) : y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ avec $p, q \in C(I, \mathbb{R})$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit (y, z) une base de solutions de $(\mathcal{E})$. Soient $t_1 < t_2$ deux zéros consécutifs de y. Montrer qu'il existe un et un seul zéro de z dans l'intervalle $]t_1, t_2[$. (Utiliser le Wronskien $W = yz' - y'z$)

2) Soient donc les équations différentielles $(E_1) : x'' + r(t)x = 0$, $(E_2) : y'' + s(t)y = 0$ avec $r, s \in C(I, \mathbb{R})$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. On suppose que $r \leq s$. Soit x une solution non nulle de (E_1) et y une solution non nulle de (E_2). Soient $t_1 < t_2$ deux zéros consécutifs de x. Montrer que si x et y ne sont pas proportionnelles sur $]t_1, t_2[$, alors il existe au moins un zéro de y dans $]t_1, t_2[$.

3) Soit l'équation différentielle $(\mathcal{E}_1) : x'' + r(t)x = 0$ avec $r \in C(I, \mathbb{R})$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Supposons que $r(t) \leq \rho^2$ où $\rho > 0$. Montrer que deux zéros consécutifs $t_1 < t_2$ de x solution non nulle de $(\mathcal{E}_1)$ vérifient $t_2 - t_1 \geq \pi/\rho$.

4) Soit l'équation différentielle $(\mathcal{E}_2) : y'' + s(t)y = 0$ avec $s \in C(I, \mathbb{R})$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Supposons que $s(t) \geq \sigma^2$ où $\sigma > 0$. Montrer que toute solution y de $(\mathcal{E}_2)$ s'annule au moins une fois dans tout intervalle fermé de longueur π/σ.

Exercice 10 (EDO et séries entières)

Soit l'équation différentielle suivante sur l'intervalle $]0, +\infty[$,

$$(t^2 + t)y'' + (3t + 1)y' + y = 0, \qquad (\mathcal{E}).$$

1) Nous cherchons tout d'abord une solution de cette équation qui soit développable en série entière, c'est-à-dire une solution de la forme $y_1(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ sur un intervalle $]-R, R[$, intervalle de convergence de la série entière.

Déterminer la relation de récurrence sur les a_n et la résoudre. Préciser y_1 (et son ensemble de définition) lorsque $y_1(0) = 1$.

2) Posons $y(t) = y_1(t)z(t)$. Etablir une équation différentielle $(\mathcal{F})$ vérifiée par z si y vérifie $(\mathcal{E})$.

3) Résoudre $(\mathcal{F})$ sur $]0, +\infty[$.

4) En déduire la résolution de $(\mathcal{E})$ sur $]0, +\infty[$.

Références : Berthelin