Master 2 Agrégation, Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,
UE3 - 14 - **Différentiabilité.**

Rappel : En dimension finie, la continuité des applications linéaires est automatique ce qui simplifie ce qu'il faut vérifier pour la différentiabilité. De plus, le choix de la norme n'est pas importante dans la définition de la différentielle. En dimension infinie, ces deux points sont à considérer : montrer la continuité du "candidat" à la différentiabilité et se rappeler que la différentiabilité peut dépendre de la norme.

Prologue :

1) Montrer que lorsqu'elle existe la différentielle est unique.

2) Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés et $\varphi : E \to F$ une application linéaire. Montrer que si E est de dimension finie, alors φ est continue.

3) Soit $(x, y) \mapsto f(x, y) \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. On pose $u(x) = f(x, -x)$ et $g(x, y) = f(y, x)$. Calculer $u'(x)$ et les dérivées partielles de g.

Exercice 1 (Calcul de Différentielles)

1) Déterminer la différentielle de l'application produit définie sur $M_N(\mathbb{R}) \times M_N(\mathbb{R})$ et à valeurs dans $M_N(\mathbb{R})$ par $(A, B) \mapsto AB$.

2) Déterminer la différentielle de l'application déterminant définie sur $M_N(\mathbb{R})$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

3) Déterminer la différentielle de l'application inverse définie sur $GL_N(\mathbb{R})$ et à valeurs dans $GL_N(\mathbb{R})$.

4) En dimension infinie, avec E un Banach, on définit Inv sur $Gl_c(E)$ et on procède de la façon suivante.
a) Montrer que le fait d'être dans un Banach permet d'écrire $(\mathbb{I} + a)^{-1} = \sum(-1)^k a^k$ pour $\|a\| < 1$.
b) Si $\|x\| < 1$, montrer que $1 - x$ est inversible.
c) En déduire que $Gl_c(E)$ est un ouvert de $L_c(E)$.
d) Calculer la différentielle de Inv en Id.
e) Calculer la différentielle de Inv en tout point u de $Gl_c(E)$.

5) Soit A une matrice symétrique réelle d'ordre n. Calculer la différentielle de φ o cette application est définie par $\varphi(x) = (Ax|x)$.

Exercice 2 (Différentielle et normes)

1) Soit N une norme sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que N n'est pas différentiable en 0.

2) Calculer la différentielle du carré d'une norme issue d'un produit scalaire.

3) Calculer la différentielle d'une norme issue d'un produit scalaire (sauf en 0).

Exercice 3 (Dérivées partielles)

1) Montrer que $f(x, y) = x^2 \mathbb{I}_{x \in \mathbb{Q}} + y^2 \mathbb{I}_{y \in \mathbb{Q}}$ est différentiable en 0, mais qu'il n'existe pas de voisinage de $(0, 0)$ sur lequel les dérivées partielles existent.

2) Calculer les dérivées partielles ∂^2_{xy} et ∂^2_{yx} de f en 0 avec $f(x, y) = xy\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ et $f(0, 0) = 0$.

Exercice 4 (Laplacien)

Dans $\mathbb{R}^n$, notons $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ et le produit scalaire associ $\langle\, ,\, \rangle$. Rappelons que $\Delta = \sum_{k=1}^{n} \partial_{x_i}^2$. Rappelons qu'une fonction harmonique P est une fonction de classe C^2 telle que $\Delta P = 0$.

1) Montrer que pour la fonction radiale $r = \|x\|$:

$$\nabla r = \frac{x}{r},$$

soit encore

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r}, \text{ pour tout } i = 1, \dots, n. \tag{1}$$

2) Pour une fonction radiale $f(x) = \varphi(r)$ de classe C^2, montrer que la diffrentielle et le laplacien valent

$$f'(x) = \varphi'(r)\frac{x}{r}, \quad \Delta f(x) = \varphi''(r) + \frac{n-1}{r}\varphi'(r). \tag{2}$$

3) Si f est de classe C^2 et P harmonique, alors montrer que

$$\Delta(fP) = P\Delta f + 2\langle f', P' \rangle.$$

Exercice 5 (Petit tour en dimension infinie)

1) Comment est définie le gradient en dimension finie et infinie ?

2) On pose $F = C([0,T], \mathbb{R})$ muni de $\|f\| = \sup_{[0,T]} |f(t)|$ et

$$E = \{f \in F\,;\, f \text{ est de classe } C^1 \text{ et nulle en } 0\}$$

muni de

$$\|f\|_1 = \sup_{[0,T]} |f'(t)|.$$

Montrer que l'application Φ définie par $\Phi(f) = f' + f^2$ est de classe C^1 sur E.

3) Soit c_0 l'e.v.n. des suites réelles qui tendent vers 0 à l'infini muni de la norme du sup. Etudier la différentiabilité de cette norme sur c_0. (On pourra séparer le cas où le sup est atteint en un seul indice et celui où il est atteint en au moins deux indice.)

On peut aussi traiter l'exemple de $l^1(\mathbb{N})$ où la norme n'est différentiable en aucun point (Cf Leichtnam-Schauer).

Références : Berthelin, Gourdon, Leichtnam-Schauer, Pommellet, Rouvière