Master 2 Agrégation, Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,
UE3 - 17 - **Théorème de Schwarz et application au relèvement.**

Exercice 1 (Théorème de Schwarz)

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^2$ telle que f admet des dérivées partielles $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ sur Ω et qui sont continues en un point (x_0, y_0) de Ω. On veut montrer que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$.

1) Préciser en quoi il s'agit d'un problème de permutation de limites.

2) On pose $\Delta(h, k) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0)$.

a) En considérant $\varphi(x) = f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)$, montrer qu'il existe $\theta_1, \theta_2 \in [0, 1]$ tels que $\Delta(h, k) = hk\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_2 k)$.

b) Montrer de façon analogue qu'il existe $\theta_3, \theta_4 \in [0, 1]$ tels que $\Delta(h, k) = hk\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + \theta_3 h, y_0 + \theta_4 k)$.

3) Conclure.

Exercice 2 (Relèvement en dimension 1)

Soit $u : I \to S^1$ de classe C^k avec $k \geq 1$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et S^1 le cercle unité de $\mathbb{R}^2$. On veut montrer qu'il existe $\theta : I \to \mathbb{R}$ de classe C^k tel que $u(t) = e^{i\theta(t)}$ pour tout $t \in I$.

Pour cela, on pose $\theta(t) = \theta_0 - i\displaystyle\int_{t_0}^{t} \frac{u'(s)}{u(s)}\, ds$. (Pourquoi ?)

1) Montrer que $\theta(t) \in \mathbb{R}$. (Dériver $|u(t)|^2 = 1$.)

2) Montrer que $u(t) = e^{i\theta(t)}$ en choisissant bien θ_0.

Exercice 3 (Relèvement en dimension n)

Soit $u : \mathbb{R}^n \to S^1$ de classe C^l avec $l \geq 2$ et S^1 le cercle unité de $\mathbb{R}^2$. On veut montrer qu'il existe $\theta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^l tel que $u(x) = e^{i\theta(x)}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

1) On pose $f_j = -i\dfrac{\partial_j u}{u}$. Montrer que $f_j(x) \in \mathbb{R}$ et $\partial_j f_k = \partial_k f_j$.

2) Montrer qu'il existe θ tel que $\partial_j \theta = f_j$. (Pour le trouver, se demander ce que devrait valoir $\partial_t \theta(tx)$.)

3) Conclure.

Remarque : L'exercice 3 permet en particulier de définir des mesures d'angles dérivables et par exemple de montrer que la divergence d'un champ de vecteurs unitaires aux courbes de niveau de $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 est égal à l'opposé de la courbure de la courbe de niveau. (Cf Rouvière.)

Références : Gourdon, Rouvière