Master 2 Agrégation, Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,
UE3 - 21 - **EDP.**

Exercice 1 (Caractéristiques, vitesse de transport constante)

Résoudre les équations aux dérivées partielles suivantes :

$$\begin{array}{lll}
1) & \partial_t u(t,x) + 2\partial_x u(t,x) = 0, & \text{avec la condition } u(0,x) = x^2, \\
2) & \partial_t u(t,x) - 2\partial_x u(t,x) = tx, & \text{avec la condition } u(0,x) = e^x, \\
3) & \partial_t u(t,x) + \partial_x u(t,x) = u(t,x), & \text{avec la condition } u(0,x) = x^3.
\end{array}$$

Exercice 2 (Caractéristiques, vitesse de transport variable)

Déterminer une solution des équations aux dérivées partielles suivantes.

$$\begin{array}{lll}
1) & \partial_t u(t,x) + (t+x)\partial_x u(t,x) = 0, & \text{avec la condition } u(0,x) = u^0(x) \\
 & \multicolumn{2}{c}{\text{pour } u^0 \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}),} \\
2) & t\partial_t u(t,x) + \partial_x u(t,x) = 0, & \text{avec la condition } u(t,0) = t^2, \\
3) & \partial_t u(t,x) + 2tx\partial_x u(t,x) = 2u(t,x), & \text{avec la condition } u(0,x) = x^2, \\
4) & \partial_t u(t,x) + \frac{e^t}{x^2}\partial_x u(t,x) = 2tu(t,x), & \text{pour } t,x > 0, \text{ avec la condition} \\
 & \multicolumn{2}{c}{u(0,x) = x^3.}
\end{array}$$

Exercice 3 (Equation des ondes en dimension un)

Soient $u^0 \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $v^0 \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Déterminer les solutions $u = u(t,x)$ de classe C^2 pour l'équation aux dérivées partielles

$$\partial^2_{tt} u - \partial^2_{xx} u = 0,$$

avec les conditions initiales

$$u(0,x) = u^0(x) \text{ et } \partial_t u(0,x) = v^0(x),$$

pour $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 4 (Equation de la chaleur et transformée de Fourier)

On considère l'équation de la chaleur sur tout $\mathbb{R}$:

$$\partial_t u(t,x) = \partial^2_{xx} u(t,x), \quad (t,x) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R}, \tag{1}$$

d'inconnue $u(t,x)$ avec une condition initiale u^0 :

$$u(0,x) = u^0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

En faisant un calcul formel avec la transformation de Fourier par rapport à la variable x, obtenir l'expression d'un candidat solution.

Exercice 5 (Equation de la chaleur et série de Fourier)

On considère l'équation de la chaleur, posée sur un segment de longueur $L > 0$:

$$\left\{\begin{array}{lll}
\partial_t u(t,x) & = \partial^2_{xx} u(t,x), & (t,x) \in]0,+\infty[\times]0,L[, \\
u(t,0) & = 0, & t \in [0,+\infty[, \\
u(t,L) & = 0, & t \in [0,+\infty[.
\end{array}\right. \tag{3}$$

d'inconnue $u(t,x)$ avec des conditions aux limites nulles (conditions de Dirichlet homogènes).

1) Chercher tout d'abord les solutions de classe C^2 à variables séparées, c'est-à-dire des solutions de la forme

$$u(t,x) = f(t)g(x).$$

2) Utiliser une fonction de la forme

$$F(t,x) = \sum_{k=1}^{+\infty} A_k e^{-\frac{k^2\pi^2}{L^2}t} \sin(\frac{k\pi}{L}x)$$

pour proposer un candidat au problème posé avec en plus la condition

$$u(0,x) = u_0(x), \qquad x \in [0,L]. \tag{4}$$

3) Montrer l'existence et l'unicité d'une solution de (3) et (4) avec la régularité

$$u \in C^\infty(]0,+\infty[\times\mathbb{R}) \cap C([0,+\infty[\times\mathbb{R}).$$

Référence : Berthelin