Master 2 Agrégation, Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,
UE3 - 23 - **Stabilité des EDO.**

Apéritif

On cherche des solutions à variables séparées en coordonnées sphériques pour l'équation de Laplace $\Delta u = 0$, plus précisément sous la forme $u(r, \theta, \varphi) = r^k a(\theta) b(\varphi)$. On rappelle que le laplacien en sphérique s'écrit : $\Delta u = \dfrac{1}{r^2}\,\partial_r(r^2\,\partial_r u) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{1}{\sin\theta}\,\partial_\theta(\sin\theta\,\partial_\theta u) + \dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\,\partial^2_\varphi u.$

Montrer que b''/b est une constante C et en posant $z = \cos\theta$ et $w(z) = a(\theta)$, montrer que si $C = 0$, alors w vérifie l'équation de Legendre

$$(1 - z^2)\, w''(z) - 2z\, w'(z) + k(k+1)\, w(z) = 0.$$

I. Stabilité, Introduction

Soient $\Omega = I \times U$ un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$. On s'intéresse à l'équation différentielle

$$x' = f(t, x), \qquad t \in I, x \in U, \qquad\qquad (\mathcal{E})$$

pour laquelle on suppose que l'on a existence et unicité pour le problème de Cauchy.

On note $x_{t_0,x_0}(t)$ la solution de $(\mathcal{E})$ telle que $x(t_0) = x_0$.

Définition 1, Stabilité : La solution $x_{t_0,x_0}(t)$ est dite stable (à droite) si
i) $\exists \alpha > 0$ tel que $\forall x_1 \in U$ tel que $\|x_0 - x_1\| \leq \alpha$, la solution $x_{t_0,x_1}(t)$ est définie pour tout $t \geq t_0$,
ii) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, 0 < \eta < \alpha$ tel que $\forall x_1 \in U$, $\|x_0 - x_1\| \leq \eta \Rightarrow \|x_{t_0,x_0}(t) - x_{t_0,x_1}(t)\| \leq \varepsilon$, $\forall t \geq t_0$.

Définition 2, Stabilité asymptotique : La solution $x_{t_0,x_0}(t)$ est dite asymptotiquement stable (à droite) si elle est stable et si $\exists \delta > 0$ tel que $x_{t_0,x_0}(t) - x_{t_0,x_1}(t) \underset{t\to+\infty}{\to} 0$ pour tout $x_1 \in U$ tel que $\|x_0 - x_1\| \leq \delta$.

Exercice 3 (A propos des définitions)

1) Illustrer graphiquement les deux notions qui viennent d'être introduites, ainsi que l'instabilité.

2) Que peut-on dire des solutions de l'équation $x' = x$, puis de $x' = -x$.

II. Stabilité, Cas des équations linéaires

On s'intéresse plus précisément ici au cas de $x' = A(t)\, x$, équation notée $(\mathcal{L})$, où $A \in C(I, \mathcal{L}(\mathbb{C}^N))$. On a alors toujours l'existence globale et l'unicité et donc le $i)$ de la définition de la stabilité est toujours vérifiée.

Dans le cas $A(t) = A$, on a le résultat suivant :

Théorème 1 : Notant λ_j les valeurs propres de A. Alors les solutions de $x' = A\, x$ sont
$a)$ asymtotiquement stables si et seulement si $\mathcal{R}e\lambda_j < 0$ pour tout j,
$a)$ stables si et seulement si ($\mathcal{R}e\lambda_j < 0$ ou ($\mathcal{R}e\lambda_j = 0$ et le bloc correspondant est diagonalisable)) pour tout j.

Exercice 4 (Stabilité dans les cas linéaire)

Soit $\Phi(t)$ une matrice fondamentale pour $(\mathcal{L})$.

1) On suppose que x_{t_0,x_0} est une solution stable pour $(\mathcal{L})$.

a) En écrivant la définition de la stabilité, quelle propriété obtient-on sur Φ ?

b) En déduire que toute solution de $(\mathcal{L})$ est stable.

2) Montrer que si x_{t_0,x_0} est asymptotiquement stable pour $(\mathcal{L})$, alors toutes les solutions de $(\mathcal{L})$ sont asymptotiquement stables.

3) Montrer que toutes les solutions de $(\mathcal{L})$ sont stables si et seulement si toutes les solutions de $(\mathcal{L})$ sont bornées (à droite).

4) Que peut-on dire sous cet aspect de l'équation $x' = 1$?

Exercice 5 (Cas constant, preuve du théorème)

1) Traiter tout d'abord le cas $N = 1$.

2) Traiter le cas où A est diagonalisable.

3) Traiter le cas où $A = \begin{pmatrix} \lambda & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I + \mathcal{N}$. Ensuite, conclure dans le cas général.

Exercice 6 (Equation linéaire perturbée par rapport à un état stable)

Soit $(\mathcal{L}_1) : x' = Ax$, et $(\mathcal{L}_2) : x' = (A + C(t))x$ avec $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^N)$ et $C \in C([0, +\infty[, \mathcal{L}(\mathbb{C}^N))$.

1) On veut tout d'abord prouver le résultat :

Proposition 1 : On suppose que la solution nulle est asymtotiquement stable pour $(\mathcal{L}_1)$, alors il existe $C > 0$ tel que si $\|C(t)\| \leq C$ pour tout $t \geq 0$, alors la solution nulle est asymtotiquement stable pour $(\mathcal{L}_2)$.

a) Ecrire la solution $x_{0,x_0}(t)$ de $(\mathcal{L}_2)$ sous forme intégrale.

b) Pourquoi existe-t'il $a > 0$ tel que $\|e^{At}\| \leq C_1 e^{-at}$ pour tout $t \geq 0$?

c) Posant $u(t) = \|x_{0,x_0}(t)\| e^{at}$, montrer que $u(t) \leq C_1 \|x_0\| + C_1 C \displaystyle\int_0^t u(s)\, ds$ et conclure.

2) On veut maintenant prouver le résultat :

Proposition 2 : On suppose que la solution nulle est stable pour $(\mathcal{L}_1)$, et que $\int_0^{+\infty} \|C(t)\|\, dt \leq +\infty$, alors la solution nulle est stable pour $(\mathcal{L}_2)$.

a) Pourquoi existe-t'il $M > 0$ tel que $\|e^{At}\| \leq M$ pour tout $t \geq 0$?

b) Posant $u(t) = \|x_{0,x_0}(t)\|$, montrer que $u(t) \leq M\|x_0\| + M \displaystyle\int_0^t \|C(s\| u(s)\, ds$ et conclure.

Exercice 7 (Equation quasi-linéaire)

Soit $(\mathcal{QL}) : x' = A(t)x + g(t, x)$ avec $A \in C([0, +\infty[, \mathcal{L}(\mathbb{C}^N))$, g continue sur : $\mathbb{R} \times U$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^N$ contenant 0 et $g(t, 0) = 0$ pour tout $t \geq 0$.

1) Montrer que toute solution de $(\mathcal{QL})$ est solution de l'équation intégrale $x(t) = \Phi(t)x_0 + \displaystyle\int_0^t \Phi(t)\Phi^{-1}(s) g(s, x(s))\, ds$ où Φ est une matrice fondamentale pour $(\mathcal{L})$.

2) On veut prouver le résultat :

Proposition 3 : On suppose que la solution nulle est stable pour $(\mathcal{L})$, que $\|g(t, x)\| \leq C(t)\|x\|$ pour tout $t \geq 0$, $x \in U$ avec C continue, positive et telle que $\int_0^{+\infty} C(t)\, dt < +\infty$. Alors la solution $x_{0,x_0}(t)$ existe pour $t \geq 0$ et la solution nulle est stable pour $(\mathcal{QL})$.

Remarque : l'existence globale n'est plus assurée car on n'a plus affaire à une équation linéaire, il faut donc la prouver.

a) On choisit Φ matrice fondamentale pour $(\mathcal{L})$ telle que $\Phi(0) = I$. Montrer qu'il existe $M_1 > 0$ et $M_2 > 0$ telle que $\|\Phi(t)\| \leq M_1$ et $\|\Phi(t)\Phi^{-1}(0)\| \leq M_2$ pour tout $t \geq 0$.

b) Montrer que la solution $x_{0,x_0}(t)$ de $(\mathcal{QL})$ est bornée et se prolonge sur $\mathbb{R}^+$.

c) Conclure.

Exercice 8 (Stabilité sur des exemples)

1) La solution $x = 0$ est-elle asymptotiquement stable pour le système

$$x' = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} x.$$

2) La solution $x = 0$ est-elle stable pour le système

$$x' = \begin{pmatrix} -2 + e^{-t} & -2 \\ 2 & 1 + e^{-3t} \end{pmatrix} x.$$

III. Stabilité, Fonctions de Lyapounov

On s'intéresse à nouveau à l'équation $(\mathcal{E})$ et on suppose que $x = 0$ est solution, c'est-à-dire que $f(t, 0) = 0$ pour tout $t \geq t_0$.

On suppose que $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$, avec $[t_0, +\infty[\times\overline{B_R(0)} \subset \Omega$, est continue et que l'on a unicité pour le problème de Cauchy.

On pose $S = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{N+1}\,;\, t \geq T, \|x\| \leq r\}$ pour $T \geq t_0$ et $0 < r < R$.

Définition 3, Fonction de Lyapounov : Il s'agit d'une fonction $V : U \to \mathbb{R}$, avec U ouvert et $S \subset U$, de classe C^1 sur S et telle que $V(t, 0) = 0$ pour tout $t \geq T$.

Définition 4, Semi-définie : Soit $V(t, x)$ une fonction de Lyapounov. On dit que $V(t, x)$ est semi-définie positive (respectivement négative) si $V(t, x) \geq 0$ pout tout $(t, x) \in S$ (respectivement ≤ 0).

Définition 5, Définie : Soit $V(t, x)$ une fonction de Lyapounov. On dit que $V(t, x)$ est définie positive (respectivement négative) s'il existe une forme quadratique $W(x)$ définie positive (respectivement négative) telle que $V(t, x) \geq W(x)$ pout tout $(t, x) \in S$ (respectivement $\leq W(x)$).

Définition 6, Borne supérieure infinitésimale : Soit $V(t, x)$ une fonction de Lyapounov. On dit que $V(t, x)$ a une borne supérieure infinitésimale si V est bornée et si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \beta > 0$ tel que $\forall t \geq T$, $\forall x$, $\|x\| \leq \beta$, on a $|V(t, x)| \leq \varepsilon$ (continuité en $x = 0$ uniforme par rapport à t).

On note $DV(t, x) = \dfrac{\partial V}{\partial t} + \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \dfrac{\partial V}{\partial x_i} f_i(t, x)$.

Proposition 4 : On suppose qu'il existe une fonction de Lyapounov V définie positive telle que DV soit semi-définie négative. Alors la solution nulle est stable pour $(\mathcal{E})$.

Proposition 5 : On suppose qu'il existe une fonction de Lyapounov V définie positive, ayant une borne supérieure infinitésimale et telle que DV soit définie négative. Alors la solution nulle est asymptotiquement stable pour $(\mathcal{E})$.

Exercice 9 (A propos des définitions)

1) Etudier la fonction $V(t, x_1, x_2) = t(x_1^2 + x_2^2) - 2x_1x_2$ avec $T = 2$ et r quelconque du point de vue des définitions 4 et 5.

2) Etudier $V(t, x) = (x_1 + \ldots + x_n) \sin t$ du point de vue de la définition 6.

3) Quel lien a-t'on entre DV et $V(t, x(t))$?

Exercice 10 (Théorème de stabilité via Lyapounov)

On cherche à prouver la proposition 4.
Schéma de la preuve à compléter :
Il existe $W(x)$ définie positive telle que $V(t, x) \geq W(x)$ sur S. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^N$ tel que $\|x_0\| \leq r$. La solution $x_{T,x_0}(t)$ est définie sur un intervalle maximal $[T, t_{max}[$ dans S.
On suppose que $t_{max} < +\infty$.

On montre que $V(t, x_{T,x_0}(t)) \leq V(T, x_0)$ pout $T \leq t \leq t_{max}$.

Soit $0 < \varepsilon < r$ et $\mu = \min_{\varepsilon \leq \|x\| \leq r} W(x) > 0$. Ecrire la définition de la continuité de $V(T,x)$ au voisinage de $x = 0$ pour obtenir $\|x_{T,x_0}(t)\| < \varepsilon$ pour tout $t \in [T, t_{max}[$.

Conclure.

Exercice 11 (Pendule sans frottement)

Soit l'équation $x'' + \sin x = 0$.

1) En posant $y = x'$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, mettre l'équation sous la forme $X' = f(X)$.

2) En cherchant une intégrale première (quantité conservée par les solutions) pour l'équation, obtenir $V(x,y) = \frac{1}{2}y^2 - \cos x + 1$.

3) Etudier la stabilité de $x = 0$ à l'aide de cette fonction de Lyapounov.

Exercice 12 (Théorème de stabilité asymptotique via Lyapounov)

On cherche à prouver la proposition 5. Il existe $W_1(x)$ et $W_2(x)$ définie positive telles que $V(t,x) \geq W_1(x)$ et $-DV(t,x) \leq W_2(x)$ sur S. On sait déjà que $x = 0$ est stable.

Supposons la propriété $(*)$ suivante : $\exists \alpha > 0$ tel que $\forall t \geq T$, si $\|x_{T,x_0}(t)\| \leq r$, alors $V(t, x_{T,x_0}(t)) \leq \alpha$.

1) En utilisant la définition de la borne supérieure infinitésimale montrer l'existence d'un $\beta > 0$ tel que $\|x_{T,x_0}(t)\| > \beta$.

2) On pose $\mu = \min_{\beta \leq \|x\| \leq r} W_2(x) > 0$. Montrer que $V(t, x_{T,x_0}(t)) \leq V(T, x_0) - \mu(t - T)$ pour $t \geq T$. En déduire que $(*)$ est fausse.

3) En déduire que $W(x_{T,x_0}(t)) \underset{t \to +\infty}{\to} 0$ et conclure.

4) Montrer que la solution nulle de $x' = x(y^2 - 1)$, $y' = y(x^2 - 1)$ est asymptotiquement stable.

Référence : Berthelin