

**EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES
(M 108)**

MARC DIENER
Maitre de Conférences

au

Département de Mathématiques

de

l'Université d'Oran



Office des Publication Universitaires

L'Algerie

1983



TABLE DES MATIÈRES

<u>AVANT PROPOS</u>	3
PREMIÈRE PARTIE : THÉORIE ANALYTIQUE	7
1. EQUATIONS DIFFERENTIELLES COMPLEXES	9
2. SYSTEMES LINEAIRES COMPLEXES (POINTS REGULIERS)	15
3. SYSTEMES LINEAIRES A POINTS SINGULIERS-REGULIERS	29
4. ANNEXE : LES METHODES CLASSIQUES D'INTEGRATION	37
DEUXIÈME PARTIE : THÉORIE QUALITATIVE	47
5. SYSTEMES DYNAMIQUES	49
6. EQUATIONS DIFFERENTIELLES : LA THEORIE LOCALE	57
7. CHAMPS DE VECTEURS	69
8. STABILITE	85
TROISIÈME PARTIE : LINÉARISATION	95
9. EQUATIONS DIFFERENTIELLES LINEAIRES	97
10. POINTS STATIONNAIRES	109
11. L'EQUATION AUX VARIATIONS	121
12. SYSTEMES LINEAIRES A COEFFICIENTS PERIODIQUES	125
13. STABILITE DES CYCLES	135
Réponses des exercices	141
Index	145

AVANT PROPOS

Pour celui qui ne les a rencontrées qu'au lycée et en première année d'université, les équations différentielles sont généralement synonymes de calculs très peu conceptuels aboutissant à des expressions algébriques ou analytiques constituant la "solution générale" de l'équation considérée. Au moment d'aborder un enseignement spécifique d'équations différentielles, il est donc fondé à croire (et à redouter) que ledit enseignement va consister à lui inculquer de nouvelles méthodes (dites de résolution par quadrature) qui lui permettront de déterminer les solutions de classes de plus en plus larges d'équations différentielles. Il convient donc d'indiquer tout de suite que très rares sont les équations différentielles dont les solutions peuvent s'exprimer à l'aide des fonctions usuelles telles que $\sin x$ ou $\log x$, ou de primitives (= quadratures) de telles fonctions. Aussi sera-t-on intéressé à formuler des théorèmes d'existence et d'unicité de solutions : l'unique solution constitue alors une (nouvelle) fonction dont on peut envisager d'étudier les propriétés (périodicité, monotonie, comportement à l'infini) afin de connaître cette fonction "aussi bien" que les fonctions trigonométriques par exemple.

Ce polycopié regroupe les notes du cours semestriel d'équations différentielles assuré à l'Université d'Oran. Il recouvre le programme du module M108, qu'il déborde légèrement par l'introduction des systèmes dynamiques : ceci permet d'adopter une présentation plus conforme aux vues actuelles du sujet abordé. J'ai l'habitude, également, d'ajouter un théorème dû à POINCARÉ sur la stabilité des solutions périodiques (chapitre 13). En dehors de l'intérêt du résultat, sa preuve constitue en effet une magnifique application de tous les résultats et méthodes vu dans les deuxième et troisième partie du cours, dont il constitue en quelque sorte un couronnement.

Chaque chapitre est suivi d'une liste d'exercices qui sont généralement une illustration d'un point abordé antérieurement. Il est inutile d'insister sur le fait que ces exercices constituent le complément indispensable du cours. Certains, marqués d'un astérisque (*), constituent au contraire un élargissement. Il n'en sont pas plus difficiles pour autant.

P R E M I È R E P A R T I E

THÉORIE ANALYTIQUE.

Cette première partie regroupe les résultats qu'on est en droit d'attendre d'un cours de graduation en équations différentielles et dont la preuve ne demande guère plus qu'un peu de dextérité de calcul. Elle traite des solutions à une variable complexe et se réduit au maniement de séries de puissances de z . Il convient cependant de souligner (et le titre de "Théorie analytique" est choisi pour cela) qu'il ne s'agit là que d'une timide incursion dans la théorie des équations à variable complexe, et qu'il ne sera pas fait usage de la géométrie propre de \mathbb{C} : il pourrait tout aussi bien s'agir là de la théorie des solutions analytiques réelles. Il convient donc de comprendre ici l'épithète "analytique" dans le sens de calcul sur des expressions, par opposition à "géométrique" qui caractériserait bien, quant à lui, les deux parties suivantes ou une véritable étude (hors programme et non traitée ici) des équations différentielles complexes, fondée sur les feuilletages.

J'ai pu constater, lors des séances d'exercices, que les méthodes usuelles d'intégration par quadratures sont très inégalement connues. Cette première partie étant consacrée aux résultats accessibles par le seul calcul, il m'a paru naturel de rappeler brièvement, en annexe à cette partie, ces diverses méthodes d'intégration : il serait regrettable, par la suite, d'être capable de développer des raisonnements évolués puis de buter sur la résolution d'une équation linéaire du premier ordre
...



1. EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES COMPLEXES

1.1. THEOREME FONDAMENTAL ET REMARQUES

A la fin du XVIII^{ème} siècle, grâce en bonne part à EULER et à la famille BERNOULLI, on connaissait la plupart des équations différentielles se résolvant par des quadratures, ainsi que les méthodes de leur résolution ⁽¹⁾ par des quadratures. Il fallu se rendre au constat qu'il n'est pas possible de résoudre "explicitement" toutes les équations différentielles. On chercha alors les solutions sous la forme de développements en séries. Cette démarche est très naturelle pour l'époque : bien que les mathématiciens aient été passablement conscients qu'il existe des fonctions peu régulières, il ne reconnaissaient pas vraiment le statut de fonction à celles qui ne sont pas "analytique", c'est-à-dire qui ne se prêtent pas à un calcul (ce qui, du point de vue épistémologique, est bien moins naïf qu'il n'y paraît à première vue).

Soit f une fonction de z et y , définie, majorée par M , et analytique sur le polydisque de \mathbb{C}^2 des (z,y) tels que $|z-z_0| \leq a$ et $|y-y_0| \leq b$. Considérons l'équation différentielle complexe

$$(1) \quad y' = f(z,y)$$

1.1.1. Théorème

Il existe une et une seule solution $z \mapsto y(z)$ de (1) définie au voisinage de z_0 , telle $y(z_0) = y_0$. Cette solution est définie et analytique sur le disque centré en z et de rayon $a(1 - e^{-b/2Ma})$.

⁽¹⁾ Ces méthodes sont présentées en annexe à cette première partie.

Nous démontrerons ce théorème au paragraphe suivant. Auparavant, faisons quelques remarques, élémentaires mais situant bien l'originalité de ce problème par rapport à ceux de la variable réelle.

1.1.2. Analyticité des solutions : Par définition du problème, ses solutions sont des fonctions dérivables. Comme toute fonction dérivable en un point de \mathbb{C} est analytique en ce point, toute solution de (1) est nécessairement analytique.

1.1.3. Prolongement analytique : Une solution y de (1), définie, disons, sur un disque, peut se révéler prolongeable analytiquement à une fonction \tilde{y} , définie sur un ouvert connexe plus gros : Ce prolongement \tilde{y} est alors encore une solution de (1). En effet, $\tilde{y}'(z)$ est analytique, et égal à la fonction analytique $f(z, \tilde{y}(z))$ sur le domaine de y , puisque y est solution de (1). Comme U est connexe, on a donc $\tilde{y}'(z) = f(z, \tilde{y}(z))$ sur tout U .

1.1.4. Rayon de convergence des solutions : Le rayon de convergence d'une solution de (1) peut être sensiblement plus petit que les rayons du polydisque sur lequel la fonction f est définie. Ainsi, $y' = f(z, y) = -y^2$ (où $a=b=\infty$) admet pour solution les fonctions $z \mapsto 1/z - z_1$, présentant un pôle au point z_1 , et dont le rayon de convergence du développement analytique au point z_0 est, de ce fait, égal à $|z_0 - z_1|$. Comme on le verra dans la preuve du théorème, la valeur du "rayon minimal garanti" à $(1 - e^{-b/2Ma})$ est lié au rayon de convergence, en $z = 0$, de l'équation $Y' = F(z, Y)$, avec $F(z, Y) = M / (1 - z/a)(1 - Y/b)$. Cette équation se résout facilement par séparation des variables et on trouve que la solution nulle au point $z = 0$ est égale à $Y(z) = b - b \sqrt{1 + (2aM/b) \log(1 - z/a)}$, qui est définie

1.1.5.

sur tout ouvert simplement connexe ne contenant ni le point $z_1 = a$ (singularité essentielle de $\log(1-z/a)$), ni le point $z_2 = a(1-e^{-b/2aM})$ (singularité algébrique de $\sqrt{1+(2aM/b)\text{Log}(1-z/a)}$). Comme $|z_2| < |z_1|$, on voit que le rayon de convergence du développement en série, en $z_0 = 0$, de la solution Y est égal à z_2 , c'est-à-dire la valeur du "RMIG" annoncé.

1.1.5. Ramification des solutions : feuilletages : Afin de fournir un formalisme adéquat pour étudier l'ensemble des solutions d'une équation différentielle (à variable réelle ou complexe) il convient avant tout de préciser ce que l'on pourrait entendre par une solution maximale. C'est ce que nous ferons avec la notion de trajectoire ou orbite dans le cas réel. Dans le cas d'une variable complexe une difficulté se présente, comme le montre déjà l'exemple $Y' = F(z, Y)$ ci-dessus, ou plus simplement, l'équation $y' = -y^3/2$ dont les solutions, autre que la solution nulle, sont données par $y(z) = 1/\sqrt{z-z_1}$, et se ramifient : il n'est, dès lors, pas possible de faire appel à la notion de solution maximale : celle-ci ne serait pas uniforme. A la place de la notion de trajectoire du cas réel, on introduit celle de feuille, c'est-à-dire une sous-variété connexe de dimension (complexe) un de \mathbb{C}_{zy}^2 qui, au voisinage de tous ses points, est le graphe d'une solution : ainsi, la feuille associée à $1/\sqrt{z-z_1}$ se projette surjectivement sur $\mathbb{C}_z - \{z_1\}$, mais "au-dessus" de chaque $z \neq z_1$ se trouvent deux points de la feuille (et non un comme pour la fonction). Les diverses feuilles associées à une équation différentielle viennent se ranger de façon régulière pour former ce que l'on appelle un *feuilletage*. Le théorème, que nous allons à présent démontrer, montre que chaque point (z_0, y_0) de \mathbb{C}^2 appartient à une et une seule feuille du feuilletage associé à $z' = f(z, y)$.

1.2. PREUVE DU THEOREME

1.2.1. Quitte à effectuer un changement de variable $Z = z - z_0$ et un changement d'inconnue $Y = y - y_0$, on peut supposer que $(z_0, y_0) = (0, 0)$. Comme f est majorée par M pour $|z| \leq a$ et $|y| \leq b$, par l'inégalité de CAUCHY, on a $|(\partial^{p+q} f / \partial z^p \partial y^q)(0, 0)| \leq M p! q! / a^p b^q$ (2).

1.2.2. Comme nous l'avons remarqué (1.1.2.), toute solution y de (1) est analytique et se développe donc en série : $y(z) = \sum_n \frac{y^{(n)}(0)}{n!} z^n$. Nous allons tout d'abord déterminer la valeur nécessaire des $y^{(n)}(0)$, ce qui montrera qu'une seule série convient, d'où découlera l'unicité de la solution. Puis nous montrerons que la série de TAYLOR correspondant à cet unique choix possible converge avec un rayon au moins égal à $a(1 - e^{-2aM/b})$ ce qui montrera l'existence d'une solution et achèvera la preuve du théorème.

1.2.3. En dérivant la relation $y'(z) = f(z, y(z))$, puis les relations ainsi obtenues, on a :

$$y' = f(z, y)$$

$$y'' = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dz}$$

$$y''' = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \frac{dy}{dz} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(\frac{dy}{dz}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{d^2 y}{dz^2}$$

et par récurrence sur l'ordre de dérivation n :

$$y^{(n)}(z) = \sum_{\substack{p+q < n \\ r < n}} \frac{\partial^{p+q} f}{\partial z^p \partial y^q}(z) \cdot k[y] \quad (3)$$

où $k[y] = k_{npq}(y, y', y^{(n-1)})$ est un polynôme à coefficients entiers positifs indépendant du choix de f .

On en déduit que $y'(0)$ est déterminé par la valeur y_0 de y en 0 , que $y''(0)$ est dès lors déterminé par $y(0)$ et $y'(0)$ et, de façon générale, du fait que $y^{(n)}(0)$ s'exprime à l'aide des dérivées partielles de f en $(0,0)$ - imposée par l'équation - et des seules dérivées $y^{(r)}(0)$ pour $r < n$, tous les coefficients du développement de TAYLOR d'une solution quelconque sont fixés par la valeur en zéro de cette solution. L'équation (1) admet donc au plus une solution telle que $y(0) = 0$.

1.2.4. Comme au (1.1.4.), soit $F(z,y) = M/(1-z/a)(1-y/b) = \sum_{p,q} Mz^p y^q / a^p b^q$.

On a, d'après (2) :

$$(4) \quad (\partial^{p+q} F / \partial z^p \partial y^q)(0,0) = p!q!M/a^p b^q \geq |(\partial^{p+q} f / \partial z^p \partial y^q)(0,0)|$$

Notons à nouveau $Y(z)$ la solution de $Y' = F(z,Y)$, nulle en zéro, et soit $(y^{(n)}(0))_{n \geq 0}$ la suite définie par (3) et $y^{(0)}(0) = 0$. Par récurrence, on a alors $Y^{(r)}(0) \geq |y^{(r)}(0)|$. En effet, l'inégalité est satisfaite pour $r = 0$ puisque $Y(0) = 0 = y(0)$; si on la suppose vraie pour tout $r < n$, comme k et l sont indépendants de f , on a :

$$Y^{(n)}(0) = \sum_{\substack{p+q < n \\ r < n}} \frac{\partial^{p+q} F}{\partial z^p \partial y^q}(0,0) \cdot k[Y(0)] \quad \text{d'après (3)}$$

$$\geq \sum_{\substack{p+q < n \\ r < n}} \left| \frac{\partial^{p+q} f}{\partial z^p \partial y^q}(0,0) \right| \cdot k[|y(0)|] \quad \text{d'après (4)}$$

$$\geq \left| \sum_{\substack{p+q < n \\ r < n}} \frac{\partial^{p+q} f}{\partial z^p \partial y^q}(0,0) \cdot k[y(0)] \right| = |y^{(n)}(0)|$$

On en déduit que le rayon de convergence de la série $\sum \frac{y^{(n)}(0)}{n!} z^n$ est au moins égal au rayon de convergence de la série de la fonction $Y(z)$,

c'est-à-dire $a(1 - e^{-b/2aM})$ (voir 1.1.4.). Il suffit de poser

$$y(z) = \sum \frac{y^{(n)}(0)}{n!} z^n .$$

1.E. EXERCICES

1.E.1. Déterminer un développement en série de puissances de z la solution de l'équation différentielle suivante, satisfaisant la condition initiale $y(0) = 0$. Déterminer le rayon de convergence de cette série.

$$(1-z) y' = 1 + z - y .$$

1.E.2. Intégrer l'équation $(1-y/b)y' = M/(1-z/a)$ et vérifier que la solution nulle en zéro du 1.1.4. est bien celle indiquée.

2. SYSTÈMES LINÉAIRES COMPLEXES (POINTS RÉGULIERS)

2.1. LE THEOREME FONDAMENTAL

2.1.1. Au lieu d'une seule équation $y' = f(z,y)$, on peut envisager le problème d'un système d'équations différentielles

$$\begin{cases} x'_1 = f_1(z, x_1, \dots, x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x'_n = f_n(z, x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

où l'inconnue est cette fois constituée par n fonctions complexes x_1, \dots, x_n de la variable complexe z , ou encore une fonction $x = (x_1, \dots, x_n)$ à valeur dans \mathbb{C}^n . Nous envisageons ici le cas où les f_i sont linéaires par rapport à l'inconnue x . Il est naturel d'adopter une écriture matricielle pour exprimer le système :

Soit $A(z)$ une matrice $n \times n$ de fonctions analytiques complexes définie pour $|z-z_0| < R$ ($R \leq \infty$), ou encore $A(z) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(z-z_0)^k$, série à coefficients matriciels. Considérons l'équation

$$(1) \quad x' = A(z) x$$

où l'inconnue x est une fonction analytique complexe à valeur dans \mathbb{C}^n .

2.1.2. Théorème

Si la série $\sum_{k=0}^{\infty} A_k(z-z_0)^k$ converge pour $|z-z_0| < R$, alors pour tout $x_0 \in \mathbb{C}^n$, il existe une unique solution x de (1) telle que $x(z_0) = x_0$. Cette solution est définie et analytique sur le disque $|z-z_0| < R$.

2.1.3. Pour $\alpha > 0$, notons $\mu_k = \mu_k(\alpha) = \alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+k-1)/k!$; rappelons que $1/(1-x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k x^k$, qui converge pour $|x| < 1$. Nous utiliserons le lemme suivant :

2.1.4. Lemme :
$$\alpha \sum_{l=0}^k \mu_l = (k+1) \mu_{k+1}$$

Preuve du lemme : En dérivant le développement de $1/(1-x)^\alpha$ que nous venons de rappeler, on obtient

$$\frac{\alpha}{1-x} \cdot \frac{1}{(1-x)^\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} k \mu_k x^{k-1}$$

or le premier terme de cette identité est égal à

$$\alpha \sum_{p=0}^{\infty} x^p \sum_{q=0}^{\infty} \mu_q x^q = \alpha \sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} \mu_q x^{p+q} = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^k \mu_l \right) x^k$$

en posant $k = p+q$. L'égalité des coefficients de x^k pour les développements en séries des deux termes de l'identité donne la relation annoncée.

CQFD.

Preuve du théorème : Comme pour le cas non linéaire (1.1.2.), la preuve consistera à déterminer la valeur nécessaire et suffisante des coefficients (vectoriels) C_k du développement en série $X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k (z-z_0)^k$ de la solution recherchée, puis à démontrer la convergence de cette série sur le disque annoncé. Sans perte de généralité, on peut supposer que $z_0 = 0$.

Si $\sum C_k z^k$ converge, pour que $x(z) = \sum C_k z^k$ soit solution de (1) il faut et il suffit que

$$\sum_{k=0}^{\infty} k C_k z^{k-1} = \sum_{p=0}^{\infty} A_p z^p \cdot \sum_{q=0}^{\infty} C_q z^q = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^k A_{k-l} C_l \right) z^k$$

2.1.5.

c'est-à-dire que, pour tout $k \geq 0$

$$(2) \quad (k+1) C_{k+1} = \sum_{l=0}^k A_{k-l} C_l$$

Comme $C_0 = X(0) = X_0$, on voit que la condition initiale et la formule de récurrence (2) déterminent entièrement les C_{k+1} pour $k \geq 0$, d'où l'unicité de la solution.

Afin d'établir l'existence, définissons la suite $(C_k)_{k \geq 0}$ par $C_0 = x_0$ puis par récurrence par la relation (2). Il suffit alors de montrer que la série $\sum C_k z^k$ converge pour $|z| < R$. Ceci résulte immédiatement de la proposition suivante :

2.1.5. Proposition

Si la série $\sum A_k z^k$ converge pour $|z| < R$, et s'il existe un réel $\alpha > 0$ et un entier a tels que la suite (C_k) satisfait pour tout k à $(k+1)|C_{k+1}| \leq \alpha \sum_{l=0}^k |A_{k+l-1}| |C_l|$, alors la série $\sum C_k z^k$ converge pour $|z| < R$.

Preuve : Par le lemme d'ABEL, le fait que la série $\sum A_k z^k$ converge pour $|z| < R$ équivaut à ce que pour tout $r > 0$, $r < R$, il existe M tel que $|A_k| r^k \leq M$ pour tout k , d'où, en appliquant l'hypothèse sur (C_k)

$$(k+1) |C_{k+1}| \leq \alpha M \sum_{l=0}^k |C_l| / r^{k+a-1}$$

En multipliant les deux membres par r^{k+1} et en posant $c_n = r^n |C_n|$, on a

$$(1) \quad (k+1) c_{k+1} \leq r^{1-a} M \sum_{l=0}^k c_l$$

Ainsi, pour $k=0$, $c_1 \leq r^{1-a} M c_0$ et plus généralement, avec les notations 2.1.3.

$$(2) \quad c_k \leq \mu_k(\beta) c_0, \text{ avec } \beta = \alpha r^{1-a} M c_0$$

En effet, en supposant que (2) est vrai pour $1 \leq k$, on obtient de (1) que $(k+1) c_{k+1} \leq \beta \sum_{l=0}^k \mu_l(\beta) c_0 = (k+1) \mu_{k+1}(\beta) c_0$, d'après le lemme (2.1.4.).

A présent $\sum |c_k| |z^k| = \sum c_k |z/r|^k \leq c_0 \sum \mu_k(\beta) \cdot |z/r|^k$, qui converge pour $|z/r| < 1$, comme nous le rappelions en (2.1.3.). On en déduit que la série $\sum c_k z^k$ converge pour $|z| (< r) < R$. CQFD.

2.2. EQUATIONS DIFFERENTIELLES LINEAIRES D'ORDRE n

2.2.1. Un problème plus général que les équations $y' = f(z,y)$ est constitué par les *équations différentielles d'ordre n*

$$(2) \quad y^{(n)} = f(z,y, \dots, y^{n-1})$$

Ce problème se ramène à un système en posant $x_1 = y$, $x_2 = y'$, ..., $x_n = y^{(n-1)}$: ainsi l'équation (2) équivaut au système

$$(3) \quad \begin{cases} x'_1 = x_2 \\ x'_2 = x_3 \\ \dots\dots\dots \\ x'_{n-1} = x_n \\ x'_n = f(z, x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

puisque $x'_n = (y^{(n-1)})' = y^{(n)}$.

2.2.2.

Dans le cas où la fonction f est linéaire par rapport à $y, \dots, y^{(n-1)}$, l'équation (2) peut encore s'écrire

$$(2') \quad y^{(n)} = a_0(z) y + a_1(z) y' + \dots + a_{n-1}(z) y^{(n-1)}$$

Dans ce cas le système (3) est linéaire en (x_1, \dots, x_n) et son expression matricielle est alors

$$2.2.2. \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & 1 \\ a_0(z) & a_1(z) & \cdot & a_{n-2}(z) & a_{n-1}(z) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}$$

2.3. CAS DES SYSTEMES A COEFFICIENTS CONSTANTS

2.3.1. En dépit des théorèmes d'existence et d'unicité que nous avons montré il n'est en général pas possible de donner explicitement les solutions d'un système d'équations différentielles linéaires. Pratiquement, la seule exception à cette situation un peu décevante, est le cas des systèmes linéaires indépendants de la variable z , c'est-à-dire le cas où la matrice $A(z)$ est constante. Nous allons voir, dans ce cas très exceptionnel du point de vue de la théorie générale, comment trouver la "solution générale" du système.

2.3.2. On considère le système

$$(4) \quad x' = A.x$$

où A est une matrice $n \times n$ à coefficients constants complexes. Le principe de la résolution dans ce cas est, grosso-modo, de se ramener si possible à n équations linéaires à une seule inconnue, telles que se présente le système (4) en restriction à l'espace unidimensionnel engendré par un vecteur propre de A . Ainsi, si C est un vecteur propre de A , associé à la valeur propre λ , on voit immédiatement que la fonction

$$x(z) = C e^{\lambda z}$$

est solution de (4). En effet :

$$x'(z) = \lambda C e^{\lambda z} = A C e^{\lambda z} = A \cdot x(z)$$

Si la matrice A admet une base de n vecteurs propres il est alors possible de former autant de solutions de (4), dont les combinaisons linéaires forment la solution générale du système (voir la théorie des équations linéaires au chapitre 9, ci-dessous).

Dans le cas où A n'est pas diagonalisable, l'existence d'une base de JORDAN pour A , c'est-à-dire d'une base de \mathbb{C}^n dans laquelle la matrice de l'application linéaire associée à A est sous forme de JORDAN, permet alors encore de résoudre le problème.

Plus précisément, soient $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ les valeurs propres de A , de multiplicité respective m_1, \dots, m_k . Désignons par d_1, \dots, d_k la dimension respective des sous espaces propres. On a donc $1 \leq d_j \leq m_j$, $i = 1, \dots, k$. Une base de JORDAN pour A est constituée de vecteurs C_{ij} , avec $i = 1, \dots, k$ et $j = 1, \dots, m_i$, et on a

$$A \cdot C_{ij} = \begin{cases} \lambda_i C_{ij} & \text{si } j \leq d_i \\ \lambda_i C_{ij} + C_{i,j-1} & \text{si } d_i < j \leq m_i \end{cases}$$

2.3.3. Proposition

Les n fonctions x_{ij} suivantes sont solution de (4).

$$\begin{aligned} X_{ij} &= e^{\lambda_i z} C_{ij} & \text{si } j \leq d_i \\ X_{ij} &= e^{\lambda_i z} \sum_{k=0}^{j-d_i} C_{i,j-k} z^k/k! & \text{si } d_i < j \leq m_i \end{aligned}$$

Preuve : Dans le cas $j \leq d_i$, la proposition est trivialement vraie comme nous l'avons vu ci-dessus (2.3.2.). Pour $d_i < j \leq m_i$, on a

$$\begin{aligned} X'_{ij} &= \lambda_i X_{ij} + e^{\lambda_i z} \sum_{k=1}^{j-d_i} C_{i,j-k} z^{k-1}/(k-1)! \\ &= \lambda_i X_{ij} + e^{\lambda_i z} \sum_{k=0}^{j-1-d_i} C_{i,j-1-k} z^k/k! \end{aligned}$$

et par ailleurs

$$\begin{aligned} A X_{ij} &= e^{\lambda_i z} \sum_{k=0}^{j-1-d_i} A C_{i,j-k} z^k/k! + e^{\lambda_i z} A C_{i,d_i} z^{j-d_i}/(j-d_i)! \\ &= e^{\lambda_i z} \sum_{k=0}^{j-1-d_i} (\lambda_i C_{i,j-k} + C_{i,j-1-k}) z^k/k! + \lambda_i e^{\lambda_i z} A C_{i,d_i} z^{j-d_i}/(j-d_i)! \\ &= \lambda_i X_{ij} + e^{\lambda_i z} \sum_{k=0}^{j-1-d_i} C_{i,j-1-k} z^k/k! \quad \text{CQFD.} \end{aligned}$$

2.3.4. Remarque : Pour $z = 0$, on a $X_{ij}(0) = C_{ij}$, les vecteurs $X_{ij}(0)$ sont donc linéairement indépendants.

2.3.5. Cas des systèmes réels : Supposons que la matrice A soit à coefficients réels et considérons le système (4) dans le cas où $(z=t)$ est réel. Dans ce cas, la partie réelle $\text{Re } x(t)$ d'une solution $x(t)$ de (4)

est encore solution de (4). En effet, comme $\operatorname{Re} A = A$, on a

$$(\operatorname{Re} x(t))' = \operatorname{Re}(x'(t)) = \operatorname{Re}(A \cdot x(t)) = A \cdot \operatorname{Re}(x(t))$$

Il en est bien sûr de même de la partie imaginaire $\operatorname{Im} x(t)$. En appliquant cette remarque et la proposition on peut donc obtenir deux familles de $2n$ solutions réelles de l'équation réelle (4).

2.E. EXERCICES

2.E.1. (i) Former le système linéaire associé, dans le plan de phase (complexe), à l'équation d'HERMITE $y'' - z y' + n y = 0$, où n est un paramètre entier.

(ii) Déterminer le développement $\sum C_k z^k$ de la solution X de ce système telle que $X(0) = (1, 0)$: on vérifiera, par récurrence sur k , qu'on a :

$$C_{2k} = ((-1)^k n(n-2) \dots (n-2k+2) / (2k)! , 0)$$

et $C_{2k+1} = (0, (-1)^{k+1} n(n-2) \dots (n-2k) / (2k+1)!)$.

(iii) En déduire que si n est un entier pair, l'équation d'HERMITE admet une solution polynômiale (on l'appelle le *polynôme d'HERMITE de degré n*).

(iv) En considérant la solution réelle telle que $X(0) = (0, 1)$, généraliser (iii) au cas d'un entier positif n quelconque.

2.E.2. On considère l'équation différentielle suivante :

$$(1) \quad z^3 y'' + z(z+1) y' - y = 0$$

(i) Existe-t-il une solution y_0 de (1) telle que $y_0(0) \neq 0$.

(ii) En supposant qu'il existe une solution $y(z) = \sum a_n z^n$ de (1),

2.E.2.

définie et analytique au point $z = 0$, déterminer la suite (a_n) .

(iii) Quel est le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$? Conclusion ?

(iv) Montrer qu'il existe une solution $y_2(z)$ définie sur $\mathbb{C} - \{0\}$ (Effectuer le changement de variable $z = 1/Z$, puis chercher le développement en série de $y_2(1/Z)$).

(v) La fonction $y_2(z)$ admet-elle un prolongement continu en $z = 0$?

2.A. ANNEXE : TRANSFORMATION DE LAPLACE APPLIQUÉE À LA RÉOLUTION D'ÉQUATIONS ET SYSTÈMES LINÉAIRES À COEFFICIENTS CONSTANTS

Dans certaines situations, on peut être intéressé de connaître la solution d'un système linéaire satisfaisant à une condition initiale explicite. Dans ce cas, la résolution générale du système constitue un détour inutile : la transformation de LAPLACE constitue le principe d'un algorithme de résolution plus directe du problème considéré.

2.A.1. RAPPELS SUR LA TRANSFORMATION DE LAPLACE

2.A.1.1. Pour toute fonction $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, localement intégrable, on pose

$$f^*(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

La transformation $f \rightarrow L(f) = f^*$ s'appelle la transformation de LAPLACE et f^* la transformée de LAPLACE de f . Pour f continue, on peut montrer que

$$f(t) = \frac{d}{dt} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\omega}^{\gamma+i\omega} f^*(p) \frac{e^{pt}}{p} dp$$

et donc que la transformation de LAPLACE est injective sur l'ensemble des fonctions continues.

2.A.1.2. Propriétés de la transformation de LAPLACE

L est linéaire.

$$L(f')(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f'(t) dt = [e^{-pt} f(t)]_0^{\infty} - \int_0^{+\infty} -pe^{-pt} f(t) dt = -f(0) + pf^*(p)$$

et de même, par récurrence

2.A.1.3.

$$L(f'')(p) = p^2 f''(p) - pf'(0) - f'(0)$$

.....

$$L(f^{(n)})(p) = p^n f^{(n)}(p) - [p^{n-1}f(0) + p^{n-2}f'(0) + \dots + f^{(n-1)}(0)]$$

2.A.1.3. Transformée de LAPLACE de quelques fonctions usuelles

$$L(t^n) = n! / p^{n+1}$$

$$L(\sin at) = a / p^2 + a^2$$

$$L(\cos at) = p / p^2 + a^2$$

$$L(e^{-\alpha t}) = 1 / p + \alpha$$

$$L(e^{-\alpha t} \sin at) = a / (p + \alpha)^2 + a^2$$

$$L(e^{-\alpha t} \cos at) = p + \alpha / (p + \alpha)^2 + a^2$$

$$L\left(\frac{1}{2a^3} (\sin at - at \cos at)\right) = 1 / (p^2 + a^2)^2$$

2.A.2. APPLICATION A LA RESOLUTION D'EQUATIONS LINEAIRES D'ORDRE n

2.A.2.1. Considérons une équation différentielle linéaire à coefficients constants

$$(1) \quad a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x = f(t)$$

Par linéarité de la transformation de LAPLACE, (1) se transforme en

$$(1^*) \quad a_0 L(x^{(n)}) + a_1 L(x^{(n-1)}) + \dots + a_n L(x) = L(f(t))$$

En posant $L(x) = x^*(p)$, on voit que (1*) équivaut à

$$[a_0 p^n + a_1 p^{(n-1)} + \dots + a_n] x^*(p) = h(p) + f^*(p)$$

où $h(p)$ est un polynôme dépendant des conditions initiales de la solution cherchée, et provenant du terme entre crochets de la dernière formule du 2.A.1.2. On a donc

$$(2) \quad x^*(p) = \frac{h(p)}{C(p)} + \frac{f^*(p)}{C(p)}, \quad \text{où } h/C \text{ est une fraction rationnelle}$$

calculée d'après (1), que l'on peut décomposer en éléments simples. On exprime le second membre de (2) comme la transformée de LAPLACE d'une somme

de fonctions élémentaires g_i en utilisant la table 2.A.1.3. En utilisant la linéarité et l'injectivité de L , on en déduit que $x = \sum g_i$.

Exemples

2.A.2.2. Trouver la solution de $\dot{x} + x = 1$ telle que $x(0) = 0$.

Soit $x^* = L(x)$, on a $(1+p)x^*(p) = 1/p$, d'où

$$x^*(p) = 1/p(p+1) = 1/p - 1/p+1 \quad \text{donc} \quad x(t) = 1 - e^{-t}$$

2.A.2.3. Trouver la solution de $\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = \sin t$, telle que

$$x(0) = 1 \quad \dot{x}(0) = 2$$

Soit $x^* = L(x)$, on a $L(\ddot{x}) = p^2 x^* - p - 2$

$$2L(\dot{x}) = 2p x^* - e$$

$$\text{et } L(\sin t) = 1/1+p^2$$

d'où $(p^2 + 2p + 5)x^* - p - 4 = 1/1+p^2$, donc

$$x^*(p) = (p + 4 + \frac{1}{1+p^2}) / (p^2 + 2p + 5)$$

$$\text{à présent } (p + 4 + \frac{1}{1+p^2}) / (p^2 + 2p + 5) = \frac{\frac{11}{10}p + 4}{p^2 + 2p + 5} + \frac{-\frac{11}{10}p + \frac{1}{5}}{1+p^2}$$

$$\text{d'où } x^*(p) = \frac{11}{10} \frac{p+1}{(p+1)^2 + 2^2} + \frac{29}{10 \cdot 2} \frac{2}{(p+1)^2 + 2^2} - \frac{1}{10} \frac{1}{p^2+1} + \frac{1}{5} \frac{1}{p^2+1}$$

$$\text{donc } x(t) = e^{-t} (\frac{11}{10} \cos 2t + \frac{29}{10} \sin 2t) - \frac{1}{10} \cos t + \frac{1}{5} \sin t$$

2.A.3. APPLICATION A LA RESOLUTION DE SYSTEMES LINEAIRES (Exemple)

Soit à résoudre

$$(1) \quad \begin{cases} 3\dot{x} + 2x + y = 1 \\ \dot{x} + 4\dot{y} + 3y = 0 \end{cases}$$

En appliquant la transformation de LAPLACE à (1) on obtient

$$(1^*) \quad \begin{cases} 3p x^* + 2x^* + p y^* = 1/p \\ p x^* + 4p y^* + 3 y^* = 0 \end{cases}$$

2.A.2.2.

$$\text{ou encore } \begin{cases} (2p + 2) x^* + p y^* = 1/p \\ p x^* + (4p+3)y^* = 0 \end{cases}$$

qui se résoud (algébriquement) en

$$\begin{cases} x^*(p) = \frac{4p+3}{p(p+1)(11p+6)} = \frac{1}{2p} - \frac{1}{5(p+1)} - \frac{33}{10(11p+6)} \\ y^*(p) = \frac{-1}{(p+1)(11p+6)} = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{p+1} - \frac{11}{11p+6} \right) \end{cases}$$

donc, en appliquant le tableau 2.A.1.3.

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} e^{-t} - \frac{3}{10} e^{-\frac{6}{11}t} \\ y(t) = \frac{1}{5} (e^{-t} - e^{-\frac{6}{11}t}) \end{cases}$$



3. SYSTÈMES LINÉAIRES À POINTS SINGULIERS RÉGULIERS (THÉORIE DE FUCHS)

3.1. SYSTEMES A POINTS SINGULIERS REGULIERS

3.1.1. Définition

On dit qu'un système d'équations différentielles linéaires complexes présente un *point singulier régulier* au point z_0 , s'il existe une matrice A de fonctions complexes, analytiques au point z_0 , telle que le système s'écrive

$$(1) \quad X' = \frac{1}{z-z_0} A(z) X$$

Le fait que la matrice A soit analytique au point z_0 équivaut à ce qu'il existe une suite de matrices (constantes) A_k et un réel $R > 0$, tels que $A(z) = \sum A_k (z-z_0)^k$, cette série étant convergente sur le disque $|z-z_0| < R$. Le résultat fondamental relatif aux systèmes à points singuliers réguliers, que nous démontrerons au 13.3., est le suivant.

3.1.2. Théorème

Si A est analytique sur $|z-z_0| < R$, $R \leq \infty$, si λ est une valeur propre de $A_0 = A(0)$, et si pour tout entier $k \geq 1$, $\lambda + k$ n'est pas une valeur propre de A_0 , alors le système à point singulier régulier (1) admet une solution non nulle

$$X(z) = (z-z_0)^\lambda \sum C_k (z-z_0)^k$$

où la série $\sum C_k (z-z_0)^k$ converge pour $|z-z_0| < R$.

3.2. EQUATIONS D'EULER, EQUATIONS DE FUCHS

L'exemple suivant aidera à trouver plausible le théorème ci-dessus. On appelle *équation d'EULER* tout système du type $X' = (1/z) A_0 X$, où A_0 est une matrice constante. En posant $z = e^t$, et en notant $' = d/dt$, on obtient par ce changement de variable :

$$\dot{X} = dX/dz \cdot dz/dt = (1/e^t) A_0 X \cdot e^t = A_0 X$$

d'où $\dot{X} = A_0 X$, qui est une équation à coefficients constants. Si λ est une valeur propre de A_0 , il existe donc une solution non nulle $X(t) = e^{\lambda t} C$; en revenant à la variable z , l'équation d'EULER initiale admet donc une solution $X(z) = z^\lambda C$: ici la fonction analytique $\sum C_k z^k$ se réduit à la constante C .

On appelle *équation de FUCHS* ⁽¹⁾ toute équation linéaire d'ordre n du type

$$(2) \quad z^n y^{(n)} + z^{n-1} a_1(z) y^{(n-1)} + \dots + z^{n-i} a_i(z) y^{(n-i)} + \dots + a_n(z) y = 0$$

où les $a_i(z)$ représentent des fonctions analytiques au voisinage de 0. Parmi ces équations de FUCHS figure l'équation de BESSEL $z^2 y'' + z y' + (z^2 - n^2) y = 0$.

En posant $x_1 = y, x_2 = zy', \dots, x_n = z^{n-1} y^{(n-1)}$

toute équation de FUCHS se ramène au système linéaire $X' = (1/z)A(z)X$, avec

$$A(z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & j-1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ -a_n(z) & -a_{n-1}(z) & -a_{n-2}(z) & \dots & -a_{n-j-1}(z) & \dots & (n-1)-a_1(z) \end{pmatrix}$$

⁽¹⁾ FUCHS (L.) J. für Math. 66 (1866), p.121 ; 68 (1868) p.354.

3.3.

En effet :

$$x_1' = y' = x_2/z, \text{ pour } p < n \quad x_p' = (z^{p-1} y^{(p-1)})' = [(p-1)z^{p-1} y^{(p-1)} + z^p y^{(p)}] / z$$

$$= [(p-1) x_p + x_{p+1}] / z, \text{ et } x_n' = [(n-1)x_n + z^n y^{(n)}] / z, \text{ d'où, d'après (3)}$$

$$x_n' = [((n-1)-a_1) x_n - a_2 x_{n-2} - \dots - a_n x_1] / z.$$

Ainsi, par exemple, à l'équation de BESSEL on associe le système

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \frac{1}{z} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ n^2 - z^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

3.3. PREUVE DU THEOREME

Quitte à effectuer le changement de variable $z = z - z_0$, on peut supposer que $z_0 = 0$. Compte tenu du fait qu'on recherche une solution X qui est le produit de z^λ par une fonction analytique, il est naturel d'introduire le changement d'inconnue

$$X = z^\lambda Y$$

d'où en dérivant $(1/z)A(z)(z^\lambda Y) = X' = z^{\lambda-1} Y' + z^\lambda Y'$, et donc

$$(3) \quad Y' = \frac{1}{z} (A(z) - \lambda I) Y$$

que nous pouvons encore écrire :

$$-(z Y' + \lambda Y) = -A(z) Y$$

$$\text{ou encore } \sum_{k=0}^{\infty} -(\lambda+k) C_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^k A_{k-l} C_l \right) z^k.$$

Ce qui équivaut à ce que pour tout entier k , on ait

$$-(\lambda+k) C_k = - \sum_{\gamma=0}^k A_{k-\gamma} C_\gamma$$

ou encore $-\lambda C_0 = -A_0 C_0$, puis $-(\lambda+k) C_k = -A_0 C_k - \sum_{\gamma=0}^{k-1} A_{k-\gamma} C_\gamma$, d'où :

$$(4) \quad (A_0 - \lambda I) C_0 = 0, \text{ et}$$

$$(5) \quad (A_0 - (\lambda+k) I) C_k = - \sum_{\gamma=0}^{k-1} A_{k-\gamma} C_\gamma \text{ pour } k \geq 1.$$

A présent, nous voyons que l'hypothèse que λ est une valeur propre de A_0 implique l'existence d'un vecteur $C_0 \neq 0$ satisfaisant à (4), et que, pour $k \geq 1$, $\lambda + k$ n'est pas une valeur propre de A_0 implique que $A_0 - (\lambda+k) I$ est inversible. En posant $B_k = (A_0 - (\lambda+k) I)^{-1}$, la relation (5) devient :

$$(6) \quad (k+1) C_{k+1} = (k+1) B_{k+1} \sum_{\gamma=0}^k A_{k+1-\gamma} C_\gamma \text{ pour } k \geq 0.$$

Or nous démontrerons ci-dessous le lemme suivant :

Lemme : Il existe $\epsilon > 0$ tel que $(k+1) \|B_{k+1}\| \leq 1/\epsilon$.

Nous voyons que (6) et le lemme impliquent que

$$(k+1) |C_{k+1}| \leq (1/\epsilon) \sum_{\gamma=0}^k \|A_{k+1-\gamma}\| \cdot |C_\gamma|$$

Nous pouvons donc appliquer la proposition (2.1.5.) qui nous avait déjà permis de conclure pour le cas régulier : Comme $\sum A_k z^k$ converge pour $|z| < k$, on voit donc que pour C_k défini par (4) et (5), la série $\sum C_k z^k$, converge pour $|z| < k$, et donc que $Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k z^k$ est une solution analytique de l'équation (3), non nulle si l'on choisit $C_0 \neq 0$, (3), c'est-à-dire, en revenant à l'inconnue initiale, $X(z) = z^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} C_k z^k$ est une solution non nulle de (1). CQFD.

Preuve du lemme : Rappelons tout d'abord que pour toute matrice inversible A , si $|A(u)| > \varepsilon$ pour tout u tel que $|u| = 1$, alors $\|A^{-1}\| \leq 1/\varepsilon$. En effet, il existerait sinon un vecteur v de norme 1, tel que $|A^{-1}(v)| > 1/\varepsilon$. Soit alors $u = A^{-1}(v) \neq 0$. Le vecteur $u/|u|$ est de norme 1, et $|A(u)/|u|| = |A(u)|/|u| = |v|/|A^{-1}(v)| < \varepsilon$, ce qui contredit l'hypothèse sur A .

A présent, pour tout $k \geq 1$, il existe u_k de norme 1 tel que $\inf \{|(A_0 - (\lambda+k)I)(u)|, |u| = 1\} = |(A_0 - (\lambda+k)I)(u_k)|$, qui est non nul puisque par hypothèse $A_0 - (\lambda+k)I$ est inversible. Par ailleurs $\lim_{k \rightarrow \infty} (A_0 - (\lambda+k)I)/k = -Id$, et donc $\lim_{k \rightarrow \infty} |(A_0 - (\lambda+k)I)(u_k)| = \lim_{k \rightarrow \infty} |u_k| = 1$.

On en déduit qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $k \geq 1$ et tout u de norme 1, $|(A_0 - (\lambda+k)I)(u)| > \varepsilon$, d'où, pour tout $k \geq 0$, $(k+1)\|B_{k+1}\| = \|(A_0 - (\lambda+k+1)I)/(k+1)\|^{-1} \leq 1/\varepsilon$. CQFD.

3.E. EXERCICES

3.E.1. Ramener les équations de FUCHS suivantes à des équations d'EULER, puis les résoudre.

$$z^2 y'' - 2z y' + 2y = 0 \quad ; \quad z^3 y''' + z y' - y = 0$$

3.E.2. On dit qu'un système $X' = M(z) X$ présente un point singulier régulier en $z = \infty$ si le système $\tilde{X} = \tilde{M}(z) X$ obtenu par le changement de variable $z = 1/t$ présente un point singulier régulier en $t = 0$ (on note \tilde{X} pour dX/dt).

(i) Montrer que si A est une matrice constante, le système

$$X' = \frac{1}{z} A X$$

présente un point singulier régulier en $z = \infty$.

(ii) Montrer, réciproquement, que pour que $X' = M(z) X$ présente un point singulier régulier en $z = 0$ et en $z = \infty$ et pas d'autre point singulier, il faut et il suffit que $M(z) = A/z$, avec A constante.

(iii) Montrer que si $X' = N(z) X$ admet un point singulier régulier en $z = 0$, en $z = 1$, et pas d'autre point singulier, alors il existe une matrice constante A et une matrice $B(z)$ analytique sur \mathbb{C} tout entier telles que

$$N(z) = \frac{A}{z} + \frac{B(z)}{z-1}$$

(iv) Montrer que $X' = N(z) X$ admet un point singulier régulier en $z = 0$, $z = 1$, et $z = \infty$, et pas d'autre point singulier, si et seulement si il existe des matrices constantes A et B telles que

$$N(z) = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-1}$$

3.E.3. Montrer que le système à points singuliers associé à l'équation hypergéométrique

$$z(1-z) y'' + (c - (a+b+1)z) y' - aby = 0$$

n'a que les points $z = 0$, $z = 1$ et $z = \infty$ comme points singuliers réguliers. (a , b et c sont des constantes complexes).

3.E.4. Réduction de l'ordre d'une équation de FUCHS :

Soit $y_0(z) = z^r \phi_0(z)$, ϕ_0 analytique en 0, une solution de l'équation de FUCHS d'ordre deux

$$z^2 y'' + z a_1(z) y' + a_2(z) y = 0$$

Montrer que $y = s y_0$ est également solution si et seulement si s' est solution d'une équation de FUCHS d'ordre un qu'on précisera. (Le même

3.E.5.

changement d'inconnue permet de réduire d'une unité l'ordre de toute équation de FUCHS dont on connaît une solution de la forme $z^r \phi_0(z)$.

3.E.5. Pour $a = b = c = 1$, trouver une solution $y_0(z) = \sum a_n z^n$ de l'équation hypergéométrique (3.E.3.), analytique et non nulle. En appliquant la méthode indiquée dans l'exercice précédent, trouver toutes les solutions de l'équation hypergéométrique dans ce cas.

4. ANNEXE : LES MÉTHODES CLASSIQUES D'INTÉGRATION PAR QUADRATURES

Nous indiquons ci-dessous les principales méthodes de résolutions d'équations $y' = f(x,y)$ ou $F(x,y,y') = 0$ par des quadratures, c'est-à-dire les méthodes qui permettent d'exprimer la solution générale (i.e. l'ensemble des solutions) à l'aide des fonctions usuelles (algébriques, trigonométriques, logarithme et exponentielles) et de primitives d'expressions algébriques ne comportant que de telles fonctions. Nous supposerons que y est une fonction réelle de la variable réelle x , afin d'éviter d'avoir à préciser le sens à donner à $\text{Log } x$ ou \sqrt{x} , ou encore ce qu'il convient d'entendre par $\int f(x)dx$ pour x complexe. La fonction f étant généralement analytique, les solutions trouvées constituent cependant également les solutions complexes de la variable complexe.

4.1. EQUATIONS A VARIABLES SEPARABLES, EQUATIONS HOMOGENES

4.1.1. On appelle *équation à variables séparables* toute équation se présentant sous la forme suivante :

$$(1) \quad y' = m(x) / n(y)$$

En multipliant les deux membres de l'équation (1) par $n(y)$, elle devient $n(y)y' = m(x)$: on dit qu'on a séparé les variables ⁽¹⁾. Si M et N sont des primitives de m et n respectivement, l'équation (1) équivaut à $(N(y))' = M'(x)$, d'où la solution générale

$$N(y) = M(x) + C$$

Exemple : Soit à résoudre l'équation

$$y' = 2x \cdot y^2 / (1-x^2)$$

⁽¹⁾ l'idée de séparer ainsi les variables d'une équation différentielle revient à Jean BERNOULLI (Acta Erudica Nov. 1694).

On sépare les variables :

$$y'/y^2 = 2x/1-x^2$$

En intégrant les deux membres, on obtient :

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{2x dx}{1-x^2}$$

d'où $-1/y = -\log |1-x^2| + C$, ou encore

$$y (\text{Log}|1-x^2| - C) = 1$$

4.1.2. Les équations de la forme

$$(2) \quad y' = g(ax + by)$$

se ramènent à des équations à variables séparables par le changement d'inconnue

$$z = ax + by$$

Exemple : Soit à résoudre l'équation

$$y' = \sin^2 (x-y)$$

On effectue le changement d'inconnue $z = x-y$; on obtient

$$z' = 1-y' = 1 - \sin^2 z = \cos^2 z .$$

On sépare les variables

$$z' / \cos^2 z = 1$$

En intégrant les deux membres on obtient

$$\int \frac{dz}{\cos^2 z} = \int dx$$

d'où $\text{tg} z = x + C$, ou encore

$$\text{tg} \quad \quad \quad x = C$$

4.1.3.

4.1.3. On appelle *équation homogène* toute équation se présentant sous la forme

$$(3) \quad y' = g(y/x)$$

du fait que la fonction $f(x,y) = g(y/x)$ est homogène de degré zéro, ou plus généralement si $m(x,y)$ et $n(x,y)$ sont deux fonctions homogènes de même degré, alors l'équation

$$m(x,y) dx + n(x,y) dy = 0$$

peut se mettre sous la forme (3).

Pour résoudre une équation homogène, on effectue le changement d'inconnue

$$y = tx$$

qui ramène l'équation homogène à une équation à variables séparables.

Exemple : Soit à résoudre l'équation

$$y' = 1 - y/x$$

On effectue le changement d'inconnue $y = tx$, on obtient

$$t'x + t = y' = 1 - y/x = 1 - t$$

ou encore

$$t' = (1 - 2t) / x$$

on sépare les variables et on intègre les deux membres

$$\int \frac{dt}{1-2t} = \int \frac{dx}{x}$$

d'où $\log 1/\sqrt{|1-2t|} = \log|x| + C$, ou encore

$$y = x/2 - K/2x$$

4.1.4. Les équations de la forme

$$(4) \quad y' = g\left(\frac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + \gamma}\right)$$

se ramènent à des équations homogènes en déplaçant l'origine des coordonnées au point d'intersection des droites $ax + by + c$ et $\alpha x + \beta y + \gamma$.

Si ces droites sont parallèles ou confondues, c'est qu'en fait l'équation (4) est du type (3).

Exemple : Soit à résoudre l'équation

$$y' = (x-4) / (x + 2y)$$

Les droites $x-4 = 0$ et $x+2y = 0$ se coupent au point $(4,-2)$.

En posant $X = x - 4$ et $Y = y + 2$, on obtient

$$\dot{Y} = dY/dX = d(y+2)/dx \cdot dx/dX = y' = X/(X+2Y)$$

qui est une équation homogène. On pose donc $Y = T X$, d'où

$$\dot{T} X + T = \dot{Y} = X / (X + 2TX) = 1/(1+2T).$$

on sépare les variables

$$\frac{(1+2T) \dot{T}}{AT^2 + T - 1} = - \frac{1}{X}$$

puis on intègre les deux membres :

$$\int \frac{dT}{3(T+1)} + \int \frac{4dT}{3(2T-1)} = - \int \frac{dX}{X}$$

$$\text{d'où} \quad \frac{1}{3} \log 3|T+1| + \frac{2}{3} \log|2T-1| = - \log|X| + C$$

et en revenant aux variables initiales :

$$(x + y - 2) (2y - x + 8)^2 = K.$$

4.2. EQUATIONS LINEAIRES DU PREMIER ORDRE - EQUATIONS DE BERNOULLI

4.2.1. La solution générale d'une équation linéaire du premier ordre avec second membre

$$(5) \quad y' = a(x) y + b(x)$$

est égale à la somme de la solution générale de l'équation homogène associée

$$(6) \quad y' = a(x) y$$

et d'une solution particulière de l'équation avec second membre (5). Dans le cas scalaire ($y(x) \in \mathbb{R}$) qui nous intéresse ici, l'équation (6) est à

4.2.1.

variables séparables et on a donc, ou bien $y = 0$, ou bien $\log|y| = \int a(x) dx =: A(x) + C$. La solution générale de l'équation homogène est donc :

$$y = Ce^{\int_{x_0}^x a(s) ds}, \quad C \in \mathbb{R}$$

En prenant C comme nouvelle inconnue (variation de la constante), définie par cette dernière relation, pour résoudre l'équation avec second membre (5), on obtient) :

$$C' = b(x) e^{-A(x)}$$

dont la résolution se ramène à une quadrature : $C = \int b(x) e^{-A(x)} dx =: B(x) + K$. La solution générale de (5) est donc égale à $y = (B(x) + K) e^{A(x)}$, $K \in \mathbb{R}$, qui est bien la somme de la solution générale de l'équation homogène ($y = Ke^{A(x)}$, $K \in \mathbb{R}$) et d'une solution particulière de (6) : ($y_0 = B(x) e^{A(x)}$).

Exemple : Soit à résoudre l'équation

$$xy' - 2y = 2x^4$$

L'équation homogène associée s'écrit :

$$y' = (2/x) y$$

dont la solution générale satisfait soit à $y = 0$, soit à

$$y'/y = 2/x$$

ou encore, en intégrant les deux membres

$$\log|y| = \log x^2 + K, \quad K \in \mathbb{R}$$

ce qui équivaut, en tenant compte de la solution $y = 0$, à

$$y = C x^2, \quad C \in \mathbb{R}$$

Par variation de la constante, on a donc

$$x(C'x^2 + 2x C) - 2Cx^2 = 2x^4$$

ce qui équivaut à

$$C'x^3 = 2x^4$$

d'où $C' = 2x$, et donc $C = x^2 + K$, $K \in \mathbb{R}$. La solution cherchée est donc

$$y = (x^2 + K) \cdot x^2, \quad K \in \mathbb{R}.$$

4.2.2. On appelle *équation de BERNOULLI* ⁽¹⁾ toute équation se présentant sous la forme

$$(7) \quad y' = a(x)y + b(x)y^n$$

Le changement d'inconnue $z = 1/y^{n-1}$ réduit (7) à une équation linéaire ⁽²⁾.

Exemple : Soit à résoudre l'équation de BERNOULLI

$$y' = 4y - 8x\sqrt{y}$$

En divisant les deux membres par $\sqrt{y} = y^{1/2}$, avec $n = 1/2$, on a soit $y = 0$, soit

$$y^{-1/2} y' = 4y^{1/2} - 8x$$

En choisissant $z = y^{1/2}$ comme nouvelle inconnue, cette équation devient

$$2y' = 4z - 8x \quad \text{ou encore} \quad z' = 2z - 4x$$

qui est linéaire. La solution générale de $z' = 2z - 4x$ est $z = Ce^{2x}$. Par variation de la constante C on a $C' = -4xe^{-2x}$, qui, après intégration par parties, donne $C = (2x + 1)e^{-2x} + K$, $K \in \mathbb{R}$, d'où

$$z = 2x + 1 + Ke^{-2x}$$

et finalement, en revenant à l'inconnue cherchée

$$y = (2x + 1 + Ke^{-2x})^2$$

4.2.3. On appelle *équation de RICCATI* ⁽³⁾ toute équation de la forme

$$(8) \quad y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$$

⁽¹⁾ Jacques BERNOULLI, Acta Erudica 1695, p.553.

⁽²⁾ méthode introduite par LEIBNITZ : Acta Erudica 1696, p.145.

⁽³⁾ RICCATI a étudié l'équation $y' + ay^2 = bx^m$ (Acta Erudica Suppl.VIII (1724), p.73) ; l'équation générale a été introduite par d'ALEMBERT (Hist.Acad.Berlin 19 (1763) p.242).

4.3.

Cette équation ne se résoud généralement pas par quadrature. Si toutefois on connaît une solution particulière y_0 de (8), le changement d'inconnue $y = Y + y_0$ réduit (8) à une seconde équation de RICCATI dont le terme indépendant de y ("c(x)") est nul : c'est donc une équation de BERNOULLI, avec $n = 2$.

Exemple : Soit à résoudre l'équation de RICCATI suivante, dont $y(x) = x$ est solution :

$$y' = -y^2/x + y(2x + 1)/x - x.$$

En posant $y = x + Y$, cette équation devient

$$x Y' = -Y^2 + Y$$

qui est une équation de BERNOULLI et qui, en posant $Y = 1/z$ se réduit à

$$x z' = -z + 1$$

La solution générale de $x z' = -z + 1$ est égale à C/x . Par variation de la constante, on obtient $C' = 1$, d'où

$$z = (x + K) / x, \quad K \in \mathbb{R}$$

En revenant à l'inconnue cherchée, on obtient

$$y = x + x/(x+K), \quad K \in \mathbb{R}$$

solution générale à laquelle il convient d'adjoindre la solution $y_0(x) = x$ (ou $K = \infty$) qui avait été écartée lors du passage de l'équation de BERNOULLI à l'équation linéaire.

4.3. EQUATIONS RESOLUES EN y

Un problème plus général que celui des équations $y' = f(x,y)$ et celui des équations non résolues par rapport à y' , c'est-à-dire du type $F(x,y,y') = 0$. Il est éventuellement possible de résoudre (algébriquement) cette équation pour la ramener à une ou plusieurs équations du type $y' = f(x,y)$ que l'on peut alors éventuellement résoudre par une des méthodes indiquées ci-dessus. Il peut également se révéler possible de résoudre (algébriquement) la relation $F(x,y,y') = 0$ par rapport à y .

On obtient alors le graphe des solutions $y(x)$ sous forme paramétrique.

Pour intégrer une équation différentielle résolue en y :

$$(9) \quad y = \phi(x, y')$$

on pose $y' = p$; en dérivant (9), on obtient

$$p = \phi'_x(x, p) + \phi'_p(x, p) \cdot p'$$

On écrit la solution de cette équation différentielle sous la forme

$$x = \xi(p)$$

et en substituant dans (9), on obtient :

$$y = \phi(\xi(p), p)$$

ces deux équations constituent les équations paramétriques du graphe de la solution.

Parmi les équations résolues par rapport à y , figurent les *équations de LAGRANGES*.

$$y = x\rho(y') + \Psi(y')$$

où $\rho(p) \neq p$, et auxquelles la procédure indiquée ci-dessus s'applique bien (voir exemple ci-dessous). Le cas où $\rho(p) = p$ correspond à l'équation de *CLAIRAUT*⁽¹⁾ :

$$y' = xy' + \Psi(y')$$

à laquelle est consacré l'exercice 4.E.

Exemple : Soit à résoudre l'équation de LAGRANGES

$$y = xy'/2 + 2x/y'$$

En posant $y' = p$ et en dérivant par rapport à x on a

$$\frac{p^2-4}{2p} = \frac{x(p^2-4)}{2p^2} \cdot \frac{dp}{dx}$$

Donc, ou bien $p^2-4 = 0$, qui donnera la ou les *solutions singulières* ou

bien $dx/dp = x/p$

(1) CLAIRAUT : Hist.Acad. Paris (1734), p.209.

4.E.

- 44 -

qui est une équation linéaire pour l'inconnue x , et dont les solutions sont $x = Cp$, $C \in \mathbb{R}$. D'où finalement :

$$x = Cp$$

$$y = Cp^2/2 + 2C$$

ou encore, en éliminant le paramètre $p = x/C$

$$y = x^2/2C + 2C, \quad C \in \mathbb{R}$$

qui est la *solution générale*. Le cas $p^2 - 4 = 0$ s'écrit encore

$$y' = \pm 2$$

dont les solutions sont $y = \pm 2x + K$. Par substitution dans l'équation, on voit que seule la valeur $K = 0$ peut convenir. Les solutions singulières sont donc :

$$y = \pm 2x.$$

4.E. EXERCICE ⁽¹⁾

Soit $F(x,y,p)$ une fonction différentiable. Pour chaque valeur de p , soit $C(p)$ la courbe de \mathbb{R}^2_{xy} d'équation $F(x,y,p) = 0$. On dira qu'une courbe $c : \mathbb{R}_t \rightarrow \mathbb{R}^2_{xy}$, $p \mapsto c(t) = (x(p), y(p))$ est une enveloppe de la famille de courbes $\{C(p)\}$ si et seulement si, pour tout p , on a

(a) $c(p) \in C(p)$

(b) l'image $c(\mathbb{R})$ est tangente au point $c(p)$ à $C(p)$

(i) Montrer que c est une enveloppe de $\{C(p)\}$ si et seulement si, pour tout p , on a

(α) $F(x(p), y(p), p) = 0$

(β) $F'_p(x(p), y(p), p) = 0$

(ii) Soit y une solution de l'équation de CLAIRAUT

$$(1) \quad y = xy' + \Psi(y)$$

⁽¹⁾ Le lecteur désireux de s'exercer à la résolution d'équations différentielles trouvera un grand nombre d'équations remarquablement commodes à intégrer dans A. PHILIPPOV : "Recueil de problèmes d'équations différentielles" Ed. Mir (Moscou) 1976 et pour les équations de LAGRANGES et CLAIRAUT, dans le "Recueil d'exercices et problèmes d'analyse mathématique", publié sous la direction de B. DEMIDOVITCH, Ed. Mir (Moscou) 1971.

En dérivant (1), montrer que y satisfait à une des deux relations suivantes :

$$(A) \quad y'' = 0$$

$$(B) \quad x = -\psi'(y(x))$$

(iii) Trouver toutes les solutions de (A) satisfaisant à (1). (Intégrale générale).

(iv) En posant $y' = p$, trouver l'équation paramétrique d'une solution de (1) satisfaisant à (B). (Intégrale singulière).

(v) Montrer que l'intégrale singulière est une enveloppe de la famille de courbes constituant l'intégrale générale.

(vi) Application : résoudre et tracer un schéma soigné des intégrales générales et singulières de $y = xy' + (y')^2$.

DEUXIÈME PARTIE

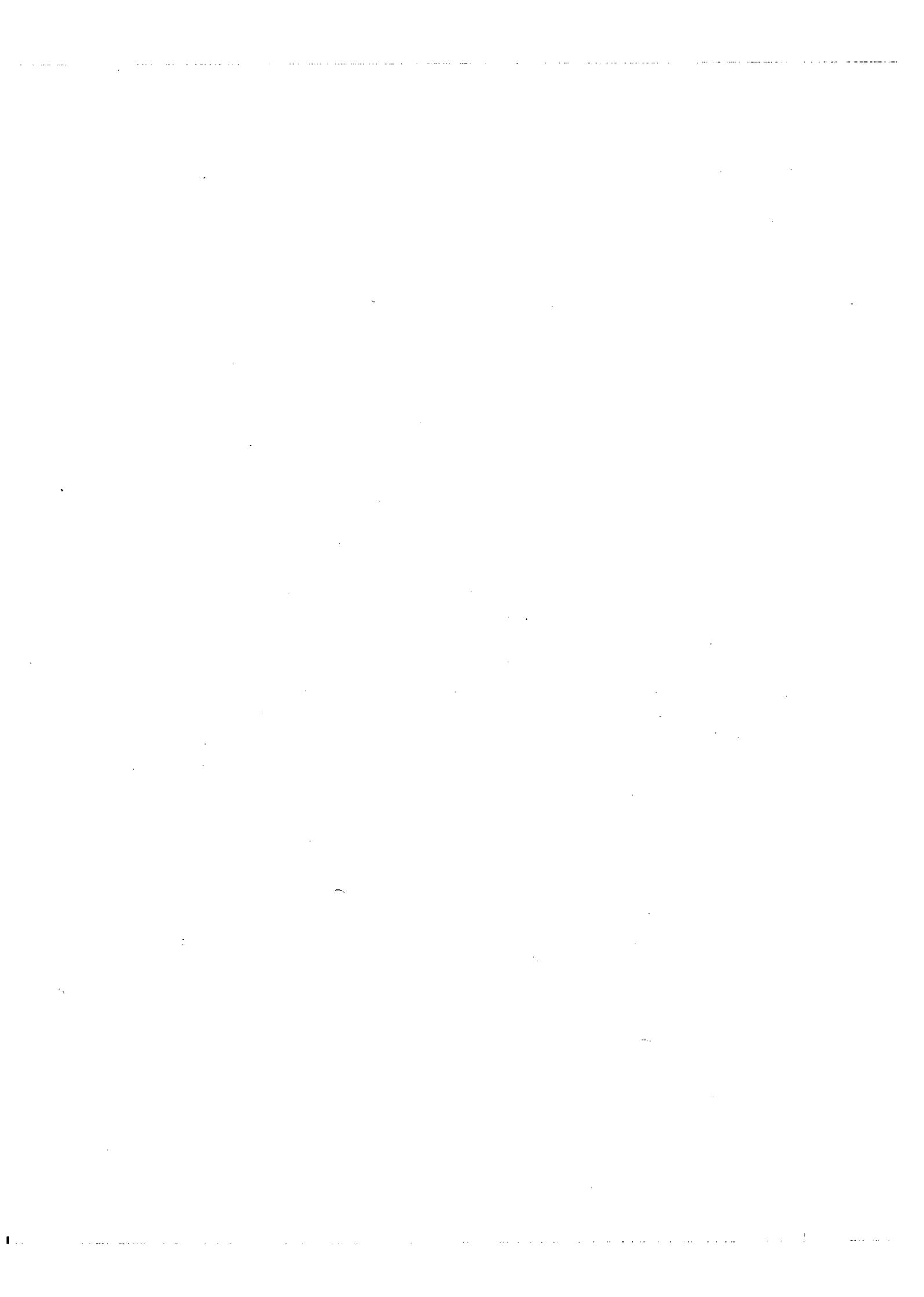
THÉORIE QUALITATIVE

"Le problème fondamental de la théorie des équations différentielles ordinaires consiste à étudier les systèmes dynamiques d'une variété, les champs de vecteurs qui sont définis sur celle-ci, et les liens qui existent entre eux".

V. ARNOLD.

Comme cela a déjà été souligné dans l'avant propos, rares sont les équations différentielles dont on peut donner explicitement les solutions. Il convient donc de se fixer d'autres objectifs pour l'étude des solutions d'une équation différentielle. Ces objectifs sont en fait très naturels, voire plus naturels que celui de la résolution par quadrature. En effet, étant donnée une fonction, on s'intéresse avant tout à déterminer ses propriétés qualitatives : périodicité, comportement à l'infini, etc... La théorie qualitative des équations différentielles s'intéresse à déterminer directement ces propriétés, sans chercher à calculer au préalable l'expression explicite de ces solutions. Elle recherchera s'il existe des solutions périodiques, quel est le comportement des autres solutions au regard de ces solutions périodiques, ou diverses autres propriétés qu'il conviendra de préciser.

Nous verrons que les ensembles de solutions de toutes les équations différentielles autonomes ont une structure commune : celle de système dynamique. C'est donc pour ces systèmes dynamiques que nous définirons les propriétés qualitatives, que nous chercherons à reconnaître, ensuite, sur l'ensemble des solutions d'une équation différentielle.



5. SYSTÈMES DYNAMIQUES

5.1. DEFINITION ET EXEMPLES

Derrière les multiples facettes que peuvent présenter les ensembles de solutions d'équations différentielles réelles (autonomes), se trouve une structure relativement simple : celle des systèmes dynamiques. Avant d'étudier les équations différentielles, nous allons examiner ces systèmes dynamiques, ce qui nous permettra de définir des objets tels que les ensembles limites qui seront particulièrement commodes pour décrire le comportement qualitatif des solutions d'une équation différentielle.

5.1.1. Définition : On appelle *système dynamique* sur une variété V une application continue $\phi : \mathbb{R} \times V \rightarrow V$, $(t,p) \mapsto \phi(t,p)$, telle que

- i) pour tout $p \in V$, $\phi(0,p) = p$
- ii) Pour tous réels s et t , et tout $p \in V$,
 $\phi(s, \phi(t,p)) = \phi(s+t, p)$.

5.1.2. Si l'on n'est pas familié de la notion de variété, on pourra tout simplement supposer que $V = \mathbb{R}^n$, dont les éléments seront généralement notés $x = (x_1, \dots, x_n)$ ou (x,y) si $n = 2$ (dans le cas d'une variété, x désignera une carte locale $x : (V, p_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ au voisinage d'un point p). La plupart des problèmes se posent généralement dans ce cas. Il est cependant parfois plus naturel (équations périodiques) ou plus commode (compactification) d'étudier le système dynamique où l'équation différentielle sur une variété, telle que le cylindre, le tore, ou la sphère. Voici quelques exemples dans le cas de \mathbb{R}^2 . On note $\phi(t;x,y)$ pour $\phi(t, (x,y))$.

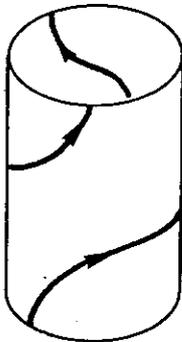
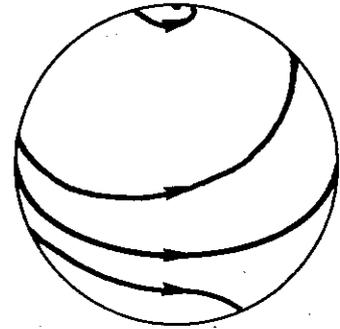
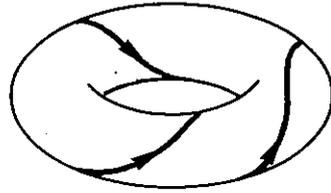
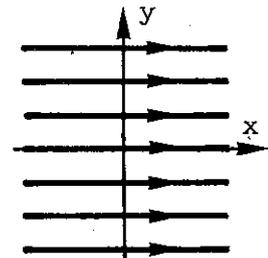


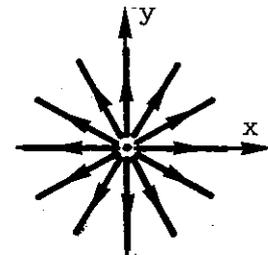
Figure 5.1.

5.1.3. Exemples

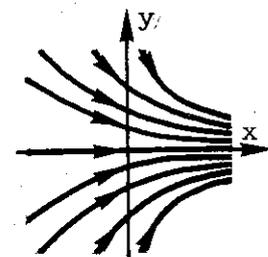
$$\phi_1(t; x, y) = (x+t, y)$$



$$\phi_2(t; x, y) = (xe^t, ye^t)$$



$$\phi_3(t; x, y) = (x+t, ye^{-t})$$



$$\phi_4(t; r \cos \theta, r \sin \theta) = (r \cos(\theta+t), r \sin(\theta+t))$$

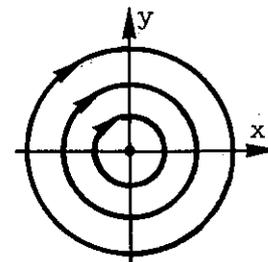


Figure 5.2.

5.1.4. Remarquons que pour chaque t dans \mathbb{R} , on peut définir une nouvelle fonction $\phi_t : V \rightarrow V$ définie par $\phi_t(p) = \phi(t, p)$. La propriété (i) des systèmes dynamiques équivaut, avec cette notation, au fait que ϕ_0 est l'identité Id de V , et la propriété (ii) équivaut à

$$\phi_{s+t} = \phi_s \circ \phi_t$$

d'où il découle immédiatement que ϕ_t est un homéomorphisme et que $\phi_t^{-1} = \phi_{-t}$. On voit donc qu'un système dynamique ϕ constitue une représentation du groupe additif \mathbb{R} dans le groupe des homéomorphismes de V . Dans la majorité des cas que nous envisagerons, ϕ sera de plus différentiable : compte tenu des remarques que nous venons de faire, on dit encore, dans ce cas, que ϕ est un *groupe à un paramètre de difféomorphismes*.

5.1.5. Champ de vecteur associé à un groupe à un paramètre : Si ϕ est différentiable, il définit un champ de vecteurs X_ϕ sur V de la manière suivante : notons $\dot{\phi}(t, p)$ la dérivée partielle de ϕ par rapport à t . On pose alors $X_\phi(p) = \dot{\phi}(0, p)$. Comme nous le verrons au Chapitre 7, l'intégration d'un champ de vecteur constitue l'opération inverse à celle-ci. Elle consiste, étant donné un champ X , à rechercher un système dynamique différentiable ϕ tel que $X = X_\phi$.

5.2. ENSEMBLES INVARIANTS

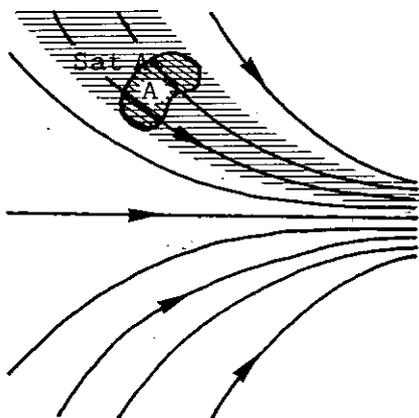
Sur la Figure 5.2. ci-dessus on a représenté en face de chaque exemple un certain nombre de lignes munies de flèches : elles représentent des orbites du système dynamique correspondant. Plus précisément :

5.2.1. Proposition - Définition

Pour tout système dynamique ϕ , la relation \sim définie sur V par $p \sim q \iff \exists t \in \mathbb{R}, \phi(p, t) = q$ est une relation d'équivalence dont les classes s'appellent les *orbites* ou les *trajectoires* du système dynamique.

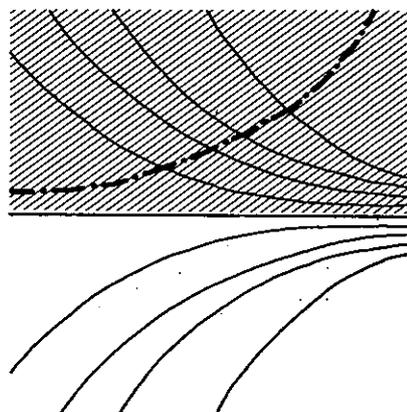
La preuve de cette proposition est élémentaire.

5.2.2. Etant donnée une relation d'équivalence sur V et une partie A de V , on appelle *saturé de A* et on note $\text{Sat } A$ la réunion des trajectoires des éléments de A . Si pour tout ouvert (resp. fermé) A de V , $\text{Sat } A$ est ouvert (resp. fermé) on dit que la relation d'équivalence est *ouverte* (resp. *fermée*). La Figure 5.4. ci-dessous montre que la relation d'équivalence associée à un système dynamique n'est pas toujours fermée.



$$\phi(t; x, y) = (x e^{-t}, y e^{-t})$$

Figure 5.3.



$$A = \{y = e^x\} ; \text{Sat } A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^+$$

Figure 5.4.

5.2.3. Proposition

La relation d'équivalence associée à un système dynamique est ouverte.

Preuve : Soit A un ouvert quelconque. On a $\text{Sat } A = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \phi_t(A)$ qui est ouvert du fait que les ϕ_t sont des homéomorphismes. CQFD.

5.2.4. Définition

On dit qu'un sous-ensemble A est *invariant* s'il contient la trajectoire de chacun de ses points.

5.2.5. On voit que A est invariant si et seulement si il est égal à son saturé. Pour cette raison un ensemble invariant est encore dit saturé. Il est élémentaire de voir que si A et B sont invariants, il en est encore de même de $A \cup B$, $A \cap B$ et \bar{A} . Le fait que la relation d'équivalence associée à un système dynamique est ouverte permet d'assurer le théorème suivant.

5.2.6. Théorème

Si A est invariant, alors l'adhérence \bar{A} , l'intérieur $\overset{\circ}{A}$ et la frontière $\text{Fr}A$ de A sont invariants.

Preuve : Soit $q = \lim_n p_n$, $(p_n) \subset A$, un quelconque point adhérent à A . Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\phi(t, q) = \phi(t, \lim p_n) = \lim \phi(t, p_n)$ qui est adhérent à A , puisque les p_n appartiennent à A , et donc \bar{A} est invariant. Le cas de $\overset{\circ}{A}$ découle du précédent en remarquant que $\overset{\circ}{A} = \overline{CA}$, et celui de $\text{Fr}A$ se déduit des deux autres en notant que $\text{Fr}A = \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A}$. CQFD.

5.3. ENSEMBLE ω -LIMITE

5.3.1. On peut, de façon naturelle, s'intéresser au comportement de $p \in V$ (sous l'action du système dynamique) lorsque t tend vers l'infini. C'est pourquoi on est conduit à poser la définition suivante :

5.3.2. Définition

On appelle *ensemble limite positif* de p et on note $\omega^+(p)$ l'ensemble des points q tels qu'il existe une suite de réels (t_n) tendant vers $+\infty$ satisfaisant à $q = \lim \phi(t_n, p)$.

5.3.2. On définit de manière analogue, en considérant les suites (t_n) tendant vers $-\infty$, la notion d'ensemble limite négatif, noté $\omega^-(p)$. Il va de soit que pour chaque résultat relatif aux ensembles limites positifs il existe un résultat analogue pour les ensembles limites négatifs. On appelle *demi trajectoire positive* de p et on note $\gamma^+(p)$ l'ensemble des pour $t \geq 0$.

5.3.3. Proposition

| Pour tout $p \in V$, on a $\omega^+(p) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\phi([t, +\infty[, p)}$

Preuve : Soit $q \in \omega^+(p)$; il existe donc une suite t_n tendant vers $+\infty$ telle que $q = \lim \phi(t_n, p)$. Comme pour tout $t \geq 0$ on a $t_n \geq t$ pour n assez grand, on voit que $q \in \overline{\phi([t, +\infty[, p)}$, et donc $q \in \bigcap_{t \geq 0} \overline{\phi([t, +\infty[, p)}$. Inversement, si $q \in \bigcap_{t \geq 0} \overline{\phi([t, +\infty[, p)}$, on voit que pour tout $n \geq 0$, q est adhérent à $\phi([n, +\infty[, p)$: il existe donc $t_n \geq n$ tel que $d(\phi(t_n, p), q) \leq 1/n$. Donc $q = \lim \phi(t_n, p)$, et comme (t_n) tend vers l'infini, on a donc $q \in \omega^+(p)$. CQFD.

5.3.4. Théorème

| Pour tout $p \in V$, $\omega^+(p)$ est fermé, invariant, et $\overline{\gamma^+(p)} = \gamma^+(p) \cup \omega^+(p)$.

Preuve : Le fait que $\omega^+(p)$ soit fermé résulte de la proposition précédente. Pour tout $q \in \omega^+(p)$, $q = \lim \phi(t_n, p)$ avec $\lim t_n = +\infty$, et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\phi(t, q) = \phi(t, \lim \phi(t_n, p)) = \lim \phi(t, \phi(t_n, p)) = \lim \phi(t+t_n, p)$. Or la suite $s_n = t_n + t$ tend vers $+\infty$, ce qui montre que $\phi(t, q) \in \omega^+(p)$ et donc que $\omega^+(p)$ est invariant.

5.E.1.

Soit q un élément quelconque de $\overline{\gamma^+(p)}$. Il existe donc une suite (p_n) d'éléments de $\gamma^+(p)$, c'est-à-dire $p_n = \phi(t_n, p)$ avec $t_n \geq 0$, telle que $q = \lim p_n$. Ou bien la suite des t_n est bornée, et quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $\lim t_n = t \geq 0$ existe : dans ce cas $q = \lim \phi(t_n, p) = \phi(t, p) \in \gamma^+(p)$. Ou bien la suite t_n n'est pas bornée, et quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $\lim t_n = +\infty$: dans ce cas $q = \lim \phi(t_n, p) \in \omega^+(p)$. CQFD.

5.E. EXERCICES

5.E.1. Vérifier que les quatre exemples de systèmes dynamiques satisfont bien aux conditions (i) et (ii).

5.E.2. On dit qu'un point est *stationnaire* si sa trajectoire se réduit au point lui-même. Montrer que l'ensemble des points stationnaires est un fermé invariant.

5.E.3. On dit qu'une trajectoire γ est *périodique*, de période $T \neq 0$, si pour tout p dans γ , on a $\phi(T, p) = p$. Montrer que pour que γ soit périodique de période $T \neq 0$, il faut et il suffit qu'il existe p_0 dans γ tel que $\phi(T, p_0) = p_0$. Montrer que la réunion des trajectoires périodiques de période T est un fermé invariant. (N.B. la réunion des trajectoires périodiques de période quelconque, n'est pas un fermé : voyez-vous un contre exemple ?).

5.E.4. * Montrer que le théorème du verset 5.2.6. est encore satisfait pour une relation d'équivalence ouverte quelconque.

5.E.5.* On dit que A est positivement invariant s'il contient la demi trajectoire positive de tous ses points. On définit, par analogie, les notions de demi trajectoire négative et d'ensemble négativement invariant. Soient A et B positivement invariants. Montrer que \bar{CA} est négativement invariant, et que $A \cap B$, $A \cup B$, \bar{A} et A sont positivement invariants.

5.E.6. Déterminer les ensembles limites des systèmes dynamiques du 1.1.3., ainsi que ceux des trajectoires des systèmes dynamiques du plan schématisés ci-dessous :



Figure 5.5.

6. EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES : LA THÉORIE LOCALE

6.1. GENERALITES

On appelle *équation différentielle ordinaire* (réelle, d'ordre un) une relation $\dot{x} = f(t, x)$ où f est une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n$. Résoudre (1) consiste à déterminer l'ensemble des fonctions (*solutions*) $t \mapsto x(t)$ définie sur un intervalle réel et à valeur dans \mathbb{R}^n telles que pour tout t , on ait $dx(t)/dt = f(t, x(t))$.

Déterminer l'ensemble des solutions de (1) peut évidemment signifier donner explicitement cet ensemble sur une forme analogue à $\Sigma = \{x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid x(t) = c e^{3t^2}, c \in \mathbb{R}\}$ (qui constitue l'ensemble des solutions de $\dot{x} = 6t x$), c'est-à-dire en exprimant ces solutions à l'aide des fonctions usuelles : polynômes, lignes trigonométriques, exponentielles ou logarithme, ou encore primitives de celle-ci (quadratures). On s'est cependant progressivement aperçu qu'il n'est en général pas possible de résoudre une équation différentielle par quadrature et que ces équations constituent, en fait, une mine de fonctions nouvelles ⁽¹⁾. Une bonne partie de l'étude des équations différentielles du siècle passé a donc consisté à démontrer des résultats assurant l'existence de solutions d'équations différentielles données (non résolubles par quadrature), et l'unicité de cette solution si l'on précise, par exemple, sa valeur pour tout $t = 0$: un résultat d'existence et d'unicité suffit alors à caractériser une nouvelle fonction ("la solution de $\dot{x} = x^2 - t$ telle que $x(0) = 0$ "), que l'on appelle - momentanément - une *transcendante* dont on peut envisager d'étudier les propriétés (périodicité, comportement à l'infini, etc ...), jusqu'à ce qu'elle vienne rejoindre la famille des fonctions "bien connues" comme l'exponentielle ou le sinus.

En fait, le seul résultat quelque peu général est dû à CAUCHY et permet d'assurer l'existence *locale* de solutions ainsi que l'unicité si l'on

⁽¹⁾ Tel est le cas pour les équations $\dot{x} = x^2 - t$ (J. LIOUVILLE), ou $\dot{x} = 6x^2 + t$ (P. PAINLEVE, Bull. Soc. Math. 28 ; pp.201-261).

impose une "condition initiale" du type $x(t_0) = x_0$. C'est à ce résultat qu'est consacré ce chapitre, le suivant s'attachant à donner les éléments permettant d'aborder le problème, encore largement ouvert, du comportement *global* des solutions.

6.2. LA METHODE DES APPROXIMATIONS SUCCESSIVES DE PICARD (1)

6.2.1. Soit à résoudre l'équation différentielle (1) : $\dot{x} = f(x,t)$, où nous supposons au moins que f est une fonction continue. On appellera *solution générale locale de (1) au voisinage (t_0, x_0)* une fonction ϕ définie sur un voisinage $I \times U \subset \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n$ de (t_0, x_0) contenu dans le domaine $\mathcal{D}(f)$ de f , telle que toute fonction partielle $t \mapsto \phi(t, x)$ soit une solution de (1) satisfaisant à la *condition initiale* $\phi(t_0, x) = x$.

La méthode des *approximations successives* consiste à poser, par exemple,

$$\phi_0(t, x) = x$$

puis à définir, par induction, ϕ_n par

$$\phi_n(t, x) = x + \int_{t_0}^t f(s, \phi_{n-1}(s, x)) ds .$$

6.2.2. Proposition

S'il existe un voisinage de (t_0, x_0) dans $\mathcal{D}(f)$ sur lequel toutes les fonctions ϕ_n sont définies et si la limite ϕ des ϕ_n existe pour la convergence uniforme sur tout compact, alors ϕ est une solution générale locale de (1).

(1) Bien que probablement connue de CAUCHY, cette méthode a été publiée en premier par LIOUVILLE (1838) pour des équations linéaires du second ordre. La version générale a été donnée par PICARD en 1893. Il convient également de citer CAQUER (1864), FUCHS (1870), PEANO (1888) et RACHET (1902).

6.2.3.

Preuve : Toutes les fonctions ϕ_n sont continues et dérivables par rapport à t , avec $d\phi_n / dt = f(t, \phi_{n-1})$. La convergence uniforme sur tout compact des ϕ_n , et donc des $d\phi_n / dt$, assure que la limite ϕ est continue, dérivable par rapport à t , et $d\phi/dt = \lim d\phi_n/dt = \lim f(\phi_{n-1}) = f(\lim \phi_n) = f(\phi)$. Enfin, $\phi(t_0, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(t_0, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x + 0 = x$. CQFD.

6.2.3. Exemples : Pour l'équation $\dot{x} = f(t)$ et $\phi_0(x, t) = x$, la suite des approximations successives est constante à partir de $n = 1$, et $\phi(t, x) = \phi_n(t, x) = \phi_1(t, x) = x + \int_{t_0}^t f(s) ds$, qui est bien la solution générale. Avec l'équation $\dot{x} = x$ et $\phi_1(t, x) = x$, on obtient comme approximations successives la suite des $\phi_n(x, t) = x(1 + t + \dots, t^n/n!)$: on reconnaît là le développement de TAYLOR de la fonction $x e^t$ qui est bien la solution générale de l'équation $\dot{x} = x$.

Le paragraphe suivant constitue la préparation de la démonstration du théorème du dernier paragraphe de ce chapitre. Il précise les propriétés de l'opérateur A , qui à la fonction $\phi_{n-1}(x, t) - x$ associe la fonction $\phi_n(x, t) - x$, où les ϕ_n sont les approximations successives que nous venons de considérer.

6.3. L'UNIQUE POINT FIXE DE L'OPERATEUR A

6.3.1. On note $B(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - x_0| \leq a\}$ et $I(b) = \{t \in \mathbb{R} \mid |t - t_0| \leq b\}$. Supposons f définie est continue sur $I(b) \times B(a)$ bornée par x , et k -lipschitzienne en x (i.e. $|f(t, x) - f(t, x')| \leq k|x - x'|$). Soient a' et b' des réels positifs quelconques, tels que $a' \leq a/2$ et $b' \leq \text{Min}\{b, a/2c, 1/2k\}$. On considère l'ensemble de fonctions suivant : $H = H(a', b', c) = \{h : I(b') \times B(a') \rightarrow \mathbb{R}^n \mid h \text{ continue, et } |h(t, x)| \leq c \cdot |t - t_0|\}$. Cet ensemble est un sous-ensemble fermé de l'ensemble des fonctions continues

sur $I(b') \times B(a')$ à valeurs dans \mathbb{R}^n , muni de la norme de la convergence uniforme. Il est donc complet. On pose

$$A(h)(t,x) = \int_{t_0}^t f(s, x + h(s,x)) ds .$$

6.3.2. Lemme

Cet opérateur A est défini sur H , à valeur dans H , et est contractant.

Preuve : Si $|t-t_0| \leq b'$ et si s est compris entre t_0 et t , on a $|t_0-s| \leq |t_0-t| \leq b' \leq b$. Si, de plus, $|x-x_0| < a'$, on a, pour $h \in H$,

$$|x + h(x,s) - x_0| \leq |x-x_0| + |h(x,s)| \leq a' + cb' \leq a/2 + ca/2c = a$$

Donc $f(s,x + h(s,x))$ est bien défini. D'après les propriétés de l'intégrale, comme f et h sont continues, il en est de même de $A(h)$. Pour montrer que $A(h) \in H$, il reste à vérifier que $|A(h)(t,x)| \leq c \cdot |t-t_0|$. Or $|A(h)(t,x)| \leq \int_{t_0}^t |f(s,x + h(s,x))| ds \leq \int_{t_0}^t c ds \leq C \cdot |t-t_0|$. Enfin A est contractant, car pour tous h_1 et h_2 dans H , et tout (t,x) dans $I(b') \times B(a')$, on a

$$\begin{aligned} |A(h_1)(t,x) - A(h_2)(t,x)| &\leq \left| \int_{t_0}^t |f(s,x + h_1(s,x)) - f(s,x+h_2(s,x))| ds \right| \\ &\leq |t-t_0| \cdot k \|h_1-h_2\| \leq b' \cdot k \cdot \|h_1-h_2\| \leq \|h_1-h_2\| / 2 \end{aligned}$$

6.3.3. Corollaire

L'opérateur A admet un unique point fixe h_0 .

6.4.1.

Preuve : L'opérateur contractant A est défini sur l'espace H qui est complet. CQFD.

6.4. LES THEOREMES D'EXISTENCE, D'UNICITE ET DE REGULARITE DES SOLUTIONS

6.4.1. On dira que la fonction f de t et x est *localement lipschitzienne en x* si pour tout (t_0, x_0) dans l'ouvert de définition de f il existe un voisinage de (t_0, x_0) sur lequel f est k lipschitzienne en x . Notons que, par le théorème des accroissements finis, on démontre facilement que si f est de classe \mathcal{C}^1 alors f est localement lipschitzienne.

6.4.2. Théorème (existence et continuité)

Soit f définie au voisinage de $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, continue, localement lipschitzienne en x . Alors l'équation différentielle $\dot{x} = f(t, x)$ admet une solution générale locale continue, définie au voisinage de (x_0, t_0) .

Preuve : Comme f est continue et localement lipschitzienne en x , il existe $k \leq 0$ et un voisinage $I(b) \times B(a)$ centré au point (t_0, x_0) sur lequel f est k -lipschitzienne en x et bornée par $c \leq 0$. Il suffit alors de poser a' et $b' > 0$ comme définis au paragraphe précédent. Soit h_0 le point fixe de A appartenant à $H(a', b', c)$. La méthode des approximations successives (2.2.2.) montre que $\phi: I(b') \times B(a') \rightarrow \mathbb{R}^n$, définie par $\phi(t, x) = x + h_0(t, x)$ est une solution générale continue de $\dot{x} = f(t, x)$. CQFD.

6.4.2. Théorème (Unicité)

Soit f définie au voisinage de $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, continue, localement lipschitzienne en x . Alors l'équation différentielle $\dot{x} = f(t, x)$ admet au plus une solution $t \mapsto \bar{x}(t)$, définie sur un intervalle ouvert I , telle que $\bar{x}(t_0) = x_0$.

Preuve : Soient \bar{x}_1 et \bar{x}_2 deux telles solutions. L'ensemble de coïncidence $K = \{t \in I \mid \bar{x}_1(t) = \bar{x}_2(t)\}$ est fermé par continuité des solutions et non vide puisque $t_0 \in K$. Montrons qu'il est ouvert : Soit $t_0' \in K$ et $x_0' = \bar{x}_1(t_0') = \bar{x}_2(t_0')$. Dans la construction du domaine de l'opérateur A , au 2.3., remplacer (t_0, x_0) par (t_0', x_0') , puis poser $a' = 0$ et choisir b' suffisamment petit pour qu'en outre, si $|t - t_0'| \leq b'$ alors $t \in I$. On vérifie trivialement que $h_1(t, x) = \bar{x}_1(t) - x_0'$ et $h_2(x, t) = \bar{x}_2(t) - x_0'$ sont deux points fixes de A , définis sur $I(b') \times B(a') = I(b') \times \{x_0'\}$. Par unicité du point fixe, on a donc $h_1 = h_2$, c'est-à-dire $\bar{x}_1(t) = \bar{x}_2(t)$ pour tout $t \in I(b') = \{t \mid |t - t_0'| \leq b'\}$. L'ensemble de coïncidence est donc également ouvert ; par connexité de I , il est donc égal à I . CQFD.

6.4.3. Une équation différentielle peut parfois dépendre d'un ou plusieurs paramètres, $m = (m_1, \dots, m_p)$

$$(2) \quad \dot{x} = f(t, x, m)$$

La solution $t \mapsto x(t) = \phi(t, x_0, m)$ issue de x pour $t = t_0$ dépendra donc de la valeur de ce paramètre. On a :

6.4.4. Corollaire (Continuité par rapport au paramètre)

f est une fonction définie et continue au voisinage de $(t_0, x_0, m_0) \in \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_m^p$ à valeur dans \mathbb{R}_x^n , localement lipschitzienne en (x, m) . La solution générale locale $\phi(t, x, m)$ de (2) est continue.

6.4.5.

Preuve : On applique le théorème de continuité (2.4.1.) à $\dot{X} = F(t, X)$, où $X = (x, m)$ et $F(t, X) = (f(t, x, m), 0) \in \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_m^p$: Soit $\Phi(t, X) = (\Phi_1(t, x, m), \Phi_2(t, x, m))$ la solution générale locale (continue) de $\dot{X} = F(t, X)$. Par définition de F on a $d\Phi_2/dt = 0$, d'où $\Phi_2(t, x, m) = \Phi_2(t_0, x, m) = m$. On a donc

$$d\Phi_1/dt = f(t, \Phi_1(t, x, m), \Phi_2(t, x, m)) = f(t, \Phi_1(t, x, m), m)$$

ce qui montre, par le théorème d'unicité (2.4.2.), que $\Phi_1 = \phi$, puisque $\Phi_1(t_0, x, m) = x = \phi(t_0, x, m)$. La continuité de ϕ découle alors de celle de Φ . CQFD.

6.4.5. Théorème (différentiabilité)

Si f est de classe \mathcal{C}^∞ , toute solution générale locale de $\dot{x} = f(t, x)$ est de classe \mathcal{C}^∞ .

Remarque : Du fait que la fonction partielle $t \mapsto \phi(t, x)$ est solution de $\dot{x} = f(x, t)$, il est bien clair que la solution générale locale admet une dérivée partielle par rapport à t continue en tout point. Nous examinerons le cas de la dérivée partielle par rapport à x au chapitre consacré à l'équation aux variations, où nous démontrerons ce théorème, que nous admettons pour le moment.

6.E. EXERCICES

6.E.1. Vérifier que les approximations successives de $\dot{x} = f(t)$ et de $\dot{x} = x$ sont bien celles annoncées au 6.2.3.

6.E.2. *Mise en défaut de la méthode des approximations successives.*

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,t) = \begin{cases} -2t & \text{si } x \geq t^2 \\ -x/t & \text{si } |x| < t^2 \\ +2t & \text{si } x \leq -t^2 \end{cases}$$

(i) Montrer que f est continue ; est-elle localement lipschitzienne en $(0,0)$?

(ii) Quelles sont les approximations successives de $\dot{x} = f(t,x)$ si on pose $\phi_0(t,x) = t^2$? Conclusion ?

6.E.3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, et $t \rightarrow x(t)$ une solution de $\dot{x} = f(t,x)$, définie sur un voisinage $]a,b[$ de 0. Soit $x_0 = x(0)$. Soit $y :]0,b[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que $y(0) > x(0)$ et $y'(t) > f(y(t),t)$ pour tout $t \in]0,b[$. On veut montrer que pour tout $t \in]0,b[$, $y(t) \geq x(t)$.

(i) Faire un dessin faisant apparaître les hypothèses et la conclusion du résultat recherché, et formuler des hypothèses analogues assurant qu'une fonction z satisfait à $z(t) \leq x(t)$ point $]a,b[$.

(ii) Par l'absurde, supposer qu'il existe $t_1 \in]0,b[$, tel que $y(t_1) < x(t_1)$. Montrer qu'il existe $t \in]0,t_1[$ tel que $y(t) = x(t)$. Soit $t_2 = \inf \{t \geq 0 \mid y(t) = x(t)\}$.

(iii) Montrer que $x(t_2) = y(t_2)$ et que $\dot{x}(t_2) \geq \dot{y}(t_2)$. Conclure.

Méthode des isoclines

6.E.4. Il existe une autre preuve classique du théorème d'existence des solutions d'une équation différentielle, fondée sur la notion de solution ϵ -approchée ⁽¹⁾. Une solution ϵ -approchée de $\dot{x} = f(t,x)$ n'est pas, comme

⁽¹⁾ voir par exemple H. CARTAN, Calcul Différentiel, Hermann (Paris), 1967.

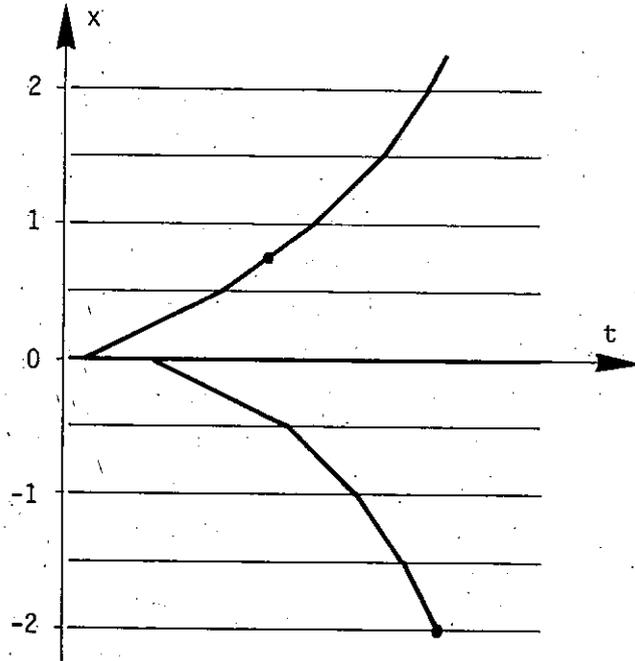
6.E.2.

on pourrait le croire, une fonction différant d'au plus ϵ d'une solution exacte, mais une fonction x_ϵ satisfaisant l'équation à ϵ près, c'est-à-dire telle que pour tout t , $|\dot{x}_\epsilon(t) - f(t, x_\epsilon(t))| \leq \epsilon$. Par d'astucieux stratagèmes de calcul et des raisonnements d'analyse non triviaux, il est possible de montrer que si $x_\epsilon(t_0)$ tends vers x_0 lorsque ϵ tend vers 0, alors, sur un domaine adéquat de la variable, les fonctions x_ϵ tendent uniformément vers une solution (exacte) de l'équation. L'existence, pour tout $\epsilon > 0$, d'une solution ϵ -approchée telle que $x_\epsilon(t_0) = x_0$ est assez facile à établir, et géométriquement bien compréhensible. Dans le cas où $x \in \mathbb{R}$, ($n=1$), ce mode de détermination d'une solution ϵ -approchée, porte le nom de *méthode des isoclines*. Avant d'indiquer cette méthode, remarquons encore que, même si une équation différentielle satisfait aux conditions d'unicité des solutions, elle admet dès que $\epsilon > 0$, une infinité de solutions ϵ -approchées passant par un point donné.

Toute solution de $\dot{x} = f(t, x)$ passant par le point (t, x) doit avoir en ce point une dérivée \dot{x} égale à $f(t, x)$, c'est-à-dire que la pente de la tangente au graphe au point (t, x) doit être égale à $f(t, x)$. On appelle *isocline* de l'équation (1) toute courbe sur laquelle f est constante, c'est-à-dire une courbe que toutes les solutions rencontrent avec une même pente. L'équation de toute isocline est donc $f(t, x) = c$, $c \in \mathbb{R}$.

Si l'on veut déterminer des solutions ϵ -approchées de $\dot{x} = f(t, x)$, on trace un réseau d'isoclines $f(t, x) = c_i$, où $c_i - c_{i-1} = \epsilon$. Partant d'un point (t_0, x_0) , on trace un segment de droite issue de (t_0, x_0) et de pente $f(t_0, x_0)$, jusqu'à ce que celle-ci rencontre une isocline $f = c_{i_0}$ du réseau. En ce point on "brise la droite", et l'on continue avec un segment de droite de pente c_{i_0} , jusqu'à rencontrer une nouvelle isocline du réseau, etc ... Il est bien clair que la ligne brisée ainsi obtenue est une solution ϵ -approchée. Ce que nous assure la théorie mentionnée ci-dessus, c'est que cette ligne approche d'autant mieux une solution exacte que ϵ est petit ...

Figure 6.
Solutions 0,5 approchées
de $\dot{x} = x$.



Application

Tracer des solutions 0,5-approchées des équations suivantes :

$$\dot{x} = x - t^2$$

$$\dot{x} = (t^2 + x^2)/2 - 1$$

6.A. ANNEXE : MÉTHODE DE RUNGE-KUTTA

La méthode des isoclines indiquée plus haut, si elle peut se révéler utile pour une exploration "à la main" du comportement des solutions d'une équation différentielle, est par contre beaucoup trop artisanale compte tenu des puissants moyens de calculs dont on dispose actuellement. L'analyse numérique a heureusement mis au point des méthodes d'intégration approchée bien plus performantes. Sans rentrer dans les détails de la justification indiquons ici la méthode de Runge et Kutta ⁽¹⁾ qui se révèle excellente et parfaitement adaptée aux possibilités informatiques de plus en plus répandues (microordinateurs ou calculettes programmables).

Il s'agit d'une méthode à pas constant, c'est-à-dire qu'étant donné un intervalle de temps h fixé à l'avance et étant connue la valeur x_n de la solution de $\dot{x} = f(t,x)$ à l'instant t_n , elle permet de donner une évaluation de la valeur x' de cette même solution à l'instant $t_{n+1} = t_n + h$.

Une méthode à pas constant, s'inspirant de la méthode des isoclines, et appelée méthode d'Euler, consiste à poser $x_{n+1} = x_n + h \cdot f(t_n, x_n)$; c'est une méthode dite d'ordre un, en ce que la solution approchée ainsi obtenue diffère de la solution exacte par un $o(h)$.

La méthode de Runge-Kutta est une méthode d'ordre quatre : on peut, pour chaque pas, escompter une erreur inférieure à la puissance quatrième du pas d'intégration h choisi.

⁽¹⁾ voir L. COLLATZ : Numerische Behandlung von Differentialgleichungen Springer Verlag (1951).

Pour la solution égale à $x = x_n$ à l'instant $t = t_n$ de

$$\dot{x} = f(t, x)$$

la méthode de Runge-Kutta consiste à choisir la valeur

$$x_{n+1} = x_n + h \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) / 6$$

pour estimation de cette solution à l'instant $t_{n+1} = t_n + h$, où

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, x_n) \\ k_2 &= f(t_n + h/2, x_n + hk_1/2) \\ k_3 &= f(t_n + h/2, x_n + hk_2/2) \\ k_4 &= f(t_n + h, x_n + hk_3) \end{aligned}$$

Pour évaluer une solution, on calcule donc successivement k_1, k_2, k_3, k_4 , et enfin x' , puis on recommence le processus pour calculer $x'' = x(t+2h)$, $x''' = x(t+3h)$ etc ...

Pour une équation du second ordre

$$\ddot{x} = f(t, x, \dot{x})$$

la méthode de Runge-Kutta consiste à poser

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + h\dot{x}_n + h(k_1 + k_2 + k_3) / 3 \\ \dot{x}_{n+1} &= \dot{x}_n + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) / 6 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} k_1 &= h \cdot f(t_n, x_n, \dot{x}_n) \\ k_2 &= h \cdot f(t_n + h/2, x_n + h \cdot \dot{x}_n / 2 + k_1 / 8, \dot{x}_n + k_1 / 2) \\ k_3 &= h \cdot f(t_n + h/2, x_n + h \cdot \dot{x}_n / 2 + k_1 / 8, \dot{x}_n + k_2 / 2) \\ k_4 &= h \cdot f(t_n + h, x_n + h \cdot \dot{x}_n / 2 + k_3 / 2, \dot{x}_n + k_3) \end{aligned}$$

Pour une équation f raisonnable, une calculette donnera un nouveau point toutes les 10 secondes environ, un microordinateur, quant à lui, en donnera jusqu'à mille dans le même laps de temps.

7. CHAMPS DE VECTEURS

7.1. DEFINITION ET REMARQUES

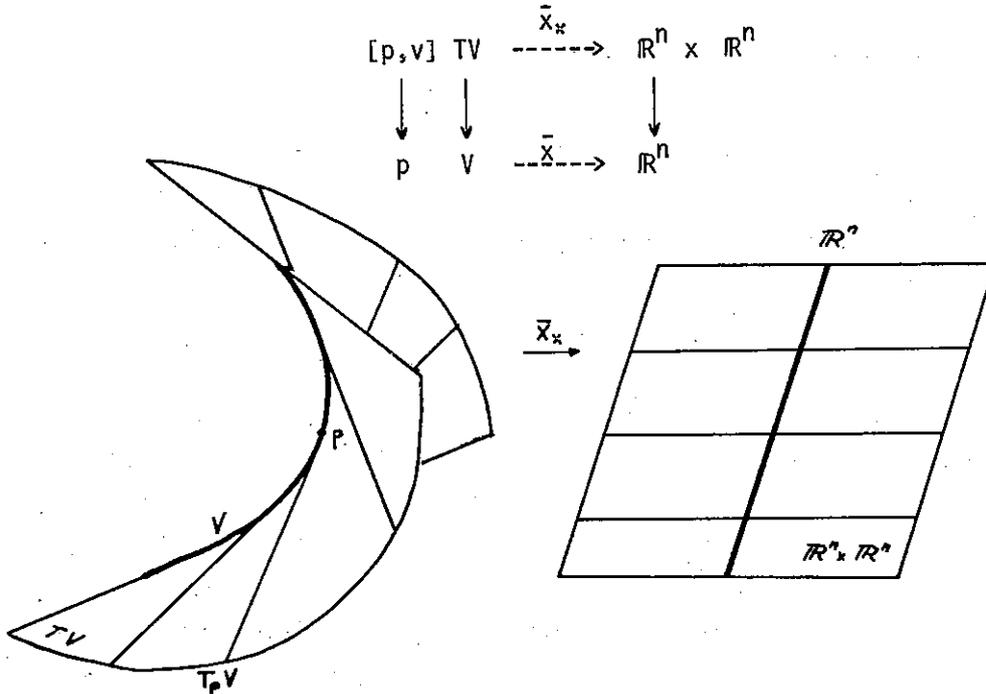
Désormais V désignera une variété différentiable (\mathcal{C}^∞).

7.1.1. Définition

On appelle *champ de vecteurs* sur V une fonction $X: V \rightarrow TV$ qui à tout point $p \in V$ associe un vecteur $X(p)$ tangent à V au point p (ou encore une section du fibré tangent $TV \rightarrow V$). On appelle *courbe intégrale* d'un champ X sur V ou *trajectoire*, une fonction différentiable $t \rightarrow p(t)$, définie sur un intervalle réel, telle que $\dot{p}(t) = X(p(t))$ pour tout t (le point $\dot{}$ représentant la dérivation d/dt par rapport au "temps" t). Les images, dans V , des courbes intégrales de X forment les *orbites* de X .

7.1.2. Un champ de vecteur est dit \mathcal{C}^∞ , \mathcal{C}^n , ou localement lipschitzien si telle est son expression dans toute carte de V . De manière générale, nous supposerons que tous les champs de vecteurs considérés sont, au moins, localement lipschitziens.

7.1.3. Afin d'établir le lien entre courbes intégrales de champs de vecteurs et solutions d'équations différentielles livrons-nous à un petit calcul, et pour cela, commençons par un rappel : Si $x = \bar{x}(p)$ est une carte locale de V , dont la réciproque est la paramétrisation $p = \bar{p}(x)$, on sait que l'on obtient une carte locale \bar{x}_* de TV , définie au voisinage de $T_p V$, en posant $\bar{x}_*(p, v) = (\bar{x}(p), D\bar{x}(p)[v])$.



A présent, si $t \mapsto p(t)$ est une courbe intégrale de X , la relation $\dot{p}(t) = X(p(t))$ équivaut, localement, à

$$\bar{x}_{*}(\dot{p}(t), \dot{p}(t)) = \bar{x}_{*}(\dot{p}(t), X(p(t)))$$

ou encore $(\bar{x}(p(t)), D\bar{x}(p(t)) [\dot{p}(t)]) = (\bar{x}(p(t)), D\bar{x}(p(t)) [X(p(t))])$.

Les premières composantes étant toujours égales, ceci se résume donc par

$$(1) \quad D\bar{x}(p(t))[\dot{p}(t)] = D\bar{x}(p(t)) [X(p(t))]$$

A présent, si l'on pose $x(t) = \bar{x}(p(t))$, nous voyons que le premier terme de (1) n'est autre que la dérivée $\dot{x}(t)$ (règle de dérivation des fonctions composées). Par ailleurs, en définissant la fonction $x \mapsto f(x)$, par $f(x) = D\bar{x}(\bar{p}(x)) [X(\bar{p}(x))]$ (expression du champs X au travers de la carte \bar{x}), le second membre de (1) est tout simplement égal à $f(x(t))$. En d'autres termes, que $t \mapsto p(t)$ soit une courbe intégrale de X équivaut au fait que $t \mapsto x(t)$ soit solution de l'équation différentielle ordinaire $\dot{x} = f(x)$.

7.1.4.

7.1.4. On est en droit de se demander où se situe le progrès d'avoir remplacé le problème de la détermination d'une fonction p (= courbe intégrale) satisfaisant à $\dot{p} = X(p)$; par celui de la détermination d'une fonction x (= solution) satisfaisant à $\dot{x} = f(x)$! La réponse est simple: il est plutôt mal commode d'exprimer (et donc d'intégrer) explicitement un champ de vecteurs. Par contre, (et c'est ce qu'on fait dans la pratique), on peut toujours en donner son expression dans une carte locale, par des expressions telles que

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\sin x_1 \end{cases}$$

Une autre motivation à ce calcul, et qui est d'importance, c'est qu'il montre que les champs de vecteurs bénéficient des mêmes propriétés locales que les équations différentielles. En particulier, tout champ de vecteurs X (que nous avons de façon générale supposé localement lipschitzien) vérifie les conclusions du théorème d'existence, d'unicité et de différentiabilité des solutions. Ainsi, pour tout $p \in V$, il existe un voisinage ouvert U du point p , un intervalle ouvert I contenant 0 et une fonction de classe \mathcal{C}^1 $\phi : I \times U \rightarrow V$ telle que toute fonction partielle $t \mapsto \phi(t, q)$ soit une courbe intégrale de X .

Une seconde objection peut être élevée : cette équation différentielle n'est que l'expression dans une carte locale du champ: il faudra donc éventuellement beaucoup d'équations différentielles pour exprimer un champ. La réponse est évidemment oui, mais elle est tempérée par la remarque suivante : la plupart des variétés que l'on est amené à considérer ont une topologie suffisamment simple pour admettre un ouvert de carte qui est partout dense (essayez !) : dès lors le champ, qui par hypothèse est continu, est entièrement déterminé par sa valeur sur cet ouvert : l'équation différentielle associée au moyen de cette carte suffit donc à connaître entièrement le champ (voir exercice 3.E.b).

7.1.5. On peut également se poser la question inverse : pourquoi s'intéresser aux champs de vecteurs et ne pas en rester aux équations différentielles. Une réponse à cette objection est la suivante : si l'inconnue, disons x , ne représente pas une longueur sur une droite, mais la valeur d'un angle, déterminé à 2π près, il est bien plus naturel de ne considérer x que comme l'expression (= la carte) d'un point se déplaçant sur un cercle qui, lui, est une variété. Une seconde réponse est que l'étude des courbes intégrales sur une variété peut être plus simple, par exemple, si cette variété est compacte (voir le théorème de prolongement, ci-dessous) : ceci avait d'ailleurs déjà été perçu à l'époque où la notion de champ de vecteurs n'existait pas, ainsi le changement de variable $Y = 1/y$ pratiqué pour les équations de RICCATI/BERNOULLI n'est autre que le changement de carte de l'espace projectif (complexe), qui lui est compact (voir exercice 7.E.6). C'est entre autres pour exprimer la géométrie dissimulée derrière ces manipulations qu'a été élaboré le formalisme des champs de vecteurs. Cette démarche historique peut d'ailleurs servir d'exemple au lecteur : qu'il n'hésite pas à chercher à comprendre les théorèmes ci-dessous en simples termes d'équations différentielles (il suffit de remplacer X par f). Par contre, lorsque ceci ne lui paraîtra plus géométriquement satisfaisant, qu'il se souvienne que les champs de vecteurs sont là pour remédier à cette insatisfaction ...

7.1.6. On aura noté que l'équation différentielle $\dot{x} = f(x)$ associée à un champ de vecteurs au moyen d'une carte locale est une équation différentielle un peu particulière, puisque la fonction f ne dépend pas de la variable t . Une telle équation différentielle s'appelle une *équation différentielle autonome* (du fait qu'en mécanique, ces équations s'introduisent dans la description de systèmes mécaniques "isolés", c'est-à-dire non soumis à une influence extérieure qui, elle, pourrait dépendre explicitement du temps). Réciproquement, du fait que les ouverts de \mathbb{R}^n sont des variétés, une équation différentielle autonome définie sur un ouvert de \mathbb{R}^n est aussi un champ de vecteurs.

7.1.7.

7.1.7. Notons que pour une équation différentielle non autonome $\dot{x} = f(t, x)$ définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n$ il est également possible d'associer un champ de vecteurs sur U : il suffit de poser $y = (t, x)$ et $F(y) = (1, f(y))$. En interprétant le $\dot{\cdot}$ comme la dérivation d/ds par rapport à une nouvelle variable indépendante s , l'équation autonome $\dot{y} = F(y)$ équivaut au système

$$(\Sigma) \begin{cases} \dot{t} = 1 \\ \dot{x} = f(t, x) \end{cases}$$

La première équation se résoud trivialement par $t = s + s_0$, et donc $s \mapsto y(s) = (s + s_0, x(s))$ est une trajectoire du champ F si et seulement si $t \mapsto x(t - s_0)$ est solution de l'équation non autonome $\dot{x} = f(t, x)$.

Aux équations différentielles $x^{(p)} = f(x, \dot{x}, \dots, x^{(p-1)})$, dites *équations différentielles autonomes d'ordre p* , il est également possible d'associer de manière naturelle un champ de vecteurs sur l'ouvert de définition $\mathcal{D}(f) (\subset \mathbb{R}^{np})$ de f . Il suffit de poser $y = (x, x_1, \dots, x_{p-1}) \in \mathbb{R}^{np}$ et de considérer l'équation différentielle autonome $\dot{y} = F(y)$ définie par le système

$$\begin{cases} \dot{x} = x_1 \\ \dots\dots\dots \\ \dot{x}_{p-1} = x_{p-1} \\ \dot{x}_{p-1} = f(x, x_1, \dots, x_{p-1}) \end{cases}$$

Le domaine de définition $\mathcal{D}(F)$ de F s'appelle l'*espace des phases* de l'équation différentielle autonome d'ordre p considérée.

Notons enfin qu'en combinant les deux méthodes on pourra associer un champ de vecteurs à toute équation différentielle (non autonome) d'ordre p $x^{(p)} = f(t, x, \dots, x^{(n-1)})$ définie sur un ouvert $\mathcal{D}(f)$ de \mathbb{R}^{1+pn} . Dans ce cas le domaine de définition $\mathcal{D}(F)$ du champ s'appelle l'*espace des phases élargi* associé à l'équation différentielle.

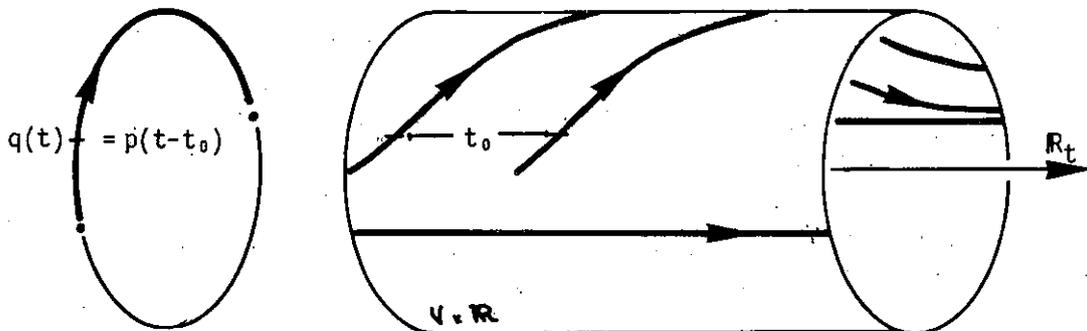
La propriété essentielle des champs de vecteurs (ou équations autonomes) par rapport aux équations différentielles non autonomes tient dans la remarque suivante :

7.1.8. Remarque fondamentale

Si $t \mapsto p(t)$ est une courbe intégrale de X définie sur $]a, b[$, alors pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$ $t \mapsto q(t) = p(t-t_0)$ est également une courbe intégrale de X , définie sur $]a-t_0, b-t_0[$.

Preuve : $\dot{q}(t) = dp(t-t_0) / dt = \dot{p}(t-t_0) \cdot (d(t-t_0)/dt) = X(p(t-t_0)) = X(q(t))$
CQFD.

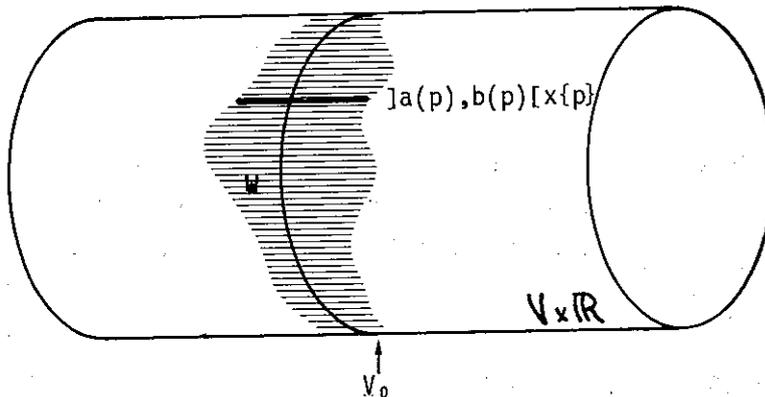
En vertu de cette remarque, on pourra, sans perte de généralité, borner notre attention aux courbes intégrales de X définies au voisinage de $t_0 = 0$.



7.2.1.

7.2. SYSTEME DYNAMIQUE LOCAL ASSOCIE A UN CHAMP DE VECTEURS

7.2.1. Dans le produit $\mathbb{R}_t \times V$ de la variété V par la droite, nous allons avoir à considérer des voisinages d'un type particulier de la sous-variété V_0 (difféomorphe à V) d'équation $t = 0$: ce sont les voisinages ouverts W tels que $W = \bigcup_{p \in V}]a(p), b(p)[\times \{p\}$ (voir figure), que nous appellerons "voisinages en brosse" de V_0 ; (V_0 est le manche, les segments $]a(p), b(p)[\times \{p\}$ formant les poils !).



7.2.2. Appelons solution générale locale d'un champ X toute fonction ϕ , définie sur un ouvert de $\mathbb{R} \times V$, $(t,p) \mapsto \phi(t,p)$, telle que pour tout p , $\phi(0,p) = p$ et telle que les fonctions partielles $t \mapsto \phi(t,p)$ soient des courbes intégrales du champ X . Une solution générale locale de X définie sur un voisinage en brosse de V_0 s'appelle un *système dynamique local* associé à X . Cette terminologie s'explique par la proposition suivante :

7.2.3. Proposition

Pour tout système dynamique local associé à X , si $\phi(t,p)$, $\phi(s+t,p)$ et $\phi(s,\phi(t,p))$ sont définis, alors $\phi(s,\phi(t,p)) = \phi(s+t,p)$.

Preuve : Par définition d'une solution générale locale, la fonction

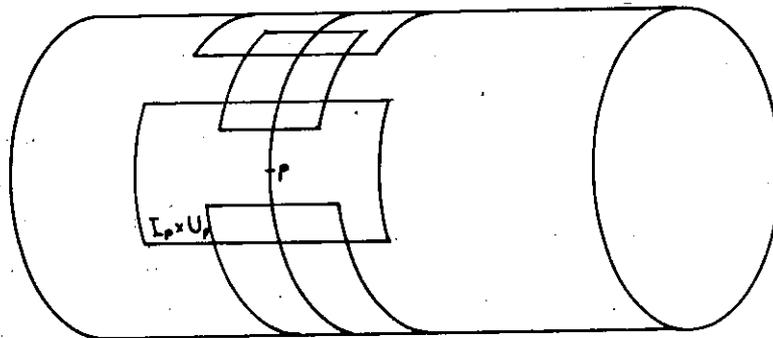
$$s \mapsto p_1(s) = \phi(s, \phi(t, p))$$

et une trajectoire de X . En vertu de la "remarque fondamentale" (7.1.8.), il en est de même pour la fonction

$$s \mapsto p_2(s) = \phi(s+t, p)$$

Or $p_1(0) = \phi(0, \phi(t, p)) = \phi(t, p) = p_2(0)$. On conclut en appliquant le théorème d'unicité (6.4.2.). CQFD.

7.2.4. L'existence d'un système dynamique local ϕ associé à X découle du théorème d'existence et d'unicité. En effet, pour tout $p \in V$, il existe un voisinage ouvert U_p et un intervalle $I_p =]a(p), b(p)[$ tels que X admette une solution locale ϕ_p définie sur $I_p \times U_p$. Il suffit alors de poser $W = \bigcup_{p \in V} I_p \times U_p$, qui est bien un voisinage en brosse de $\{0\} \times V$, et $\phi(t, p) = \phi_p(t, p)$. Notons que par le théorème d'unicité $\phi = \phi_p$ sur tout l'ouvert $I_p \times U_p$ (et pas seulement sur $I_p \times \{p\}$), ce qui montre que ϕ a les mêmes propriétés locales que ϕ_p et est donc différentiable.



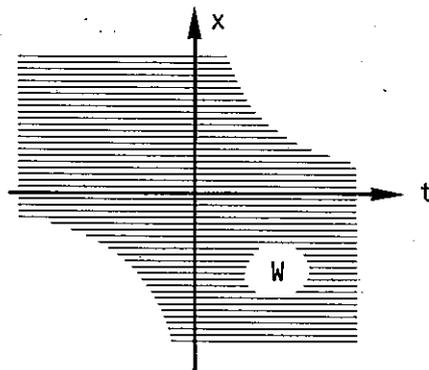
Notons également que deux systèmes dynamiques locaux quelconques sont, toujours par unicité des solutions, égaux sur l'intersection de leurs domaines. Il existe donc une solution générale locale ϕ définie sur la réunion W des domaines de définition de tous les systèmes dynamiques locaux $(\phi_i)_{i \in I}$ (pour $(t,p) \in W_i$, poser $\phi(t,p) = \phi_i(t,p)$). Comme la réunion de voisinages en brosse est un voisinage en brosse, ϕ est donc également un système dynamique local et son domaine de définition W est maximal (le domaine de définition de tout autre système dynamique local est nécessairement contenu dans W). De ce fait, ϕ s'appelle le *système dynamique local maximal associé à X* .

7.2.5. Définition

Si le système dynamique maximal de X est défini sur tout $V \times \mathbb{R}$, on dit que le champ X est *complet*.

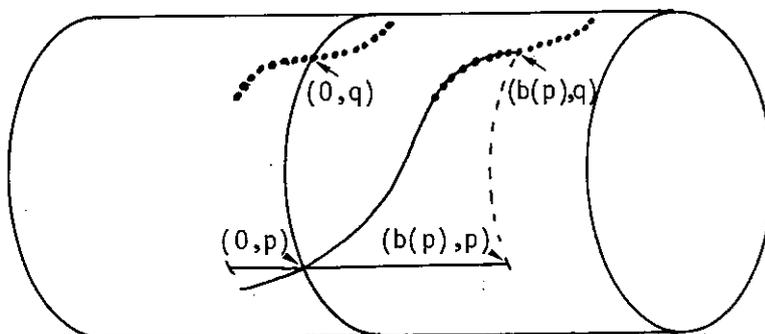
7.2.6. Exemples

7.2.6,1. La solution générale de l'équation $\dot{x} = x^2$ est $\phi(t,x) = x/(1-xt)$. Le système dynamique local maximal du champ $X(x) = x^2$ est donc égal à la composante de $\{0\} \times \mathbb{R}_x$ de l'ouvert défini par $xt \neq 1$.



7.2.6.2. Si $\phi: \mathbb{R} \times V \rightarrow V$ est un système dynamique de classe \mathcal{C}^1 , en posant $X(p) = (d\phi/dt)(0,p)$ on définit un champ de vecteurs sur V , dont ϕ est une solution générale globale. Ce champ X est donc complet.

7.2.6.3. Soit $\dot{x} = Ax$ (A est une matrice réelle $n \times n$) un système différentiel linéaire à coefficients constants. Le champ X sur \mathbb{R}^n associé à ce système est complet. En effet, on vérifie immédiatement que $\phi(t,x) = (\exp tA)x = (\sum_{n=0}^{\infty} t^n A^n/n!) \cdot x$ est une solution générale locale de X , définie pour tout $t \in \mathbb{R}$; (la série est uniformément convergente sur tout compact de \mathbb{R}).



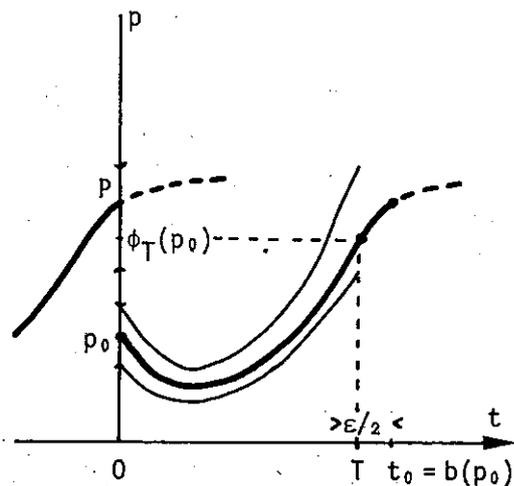
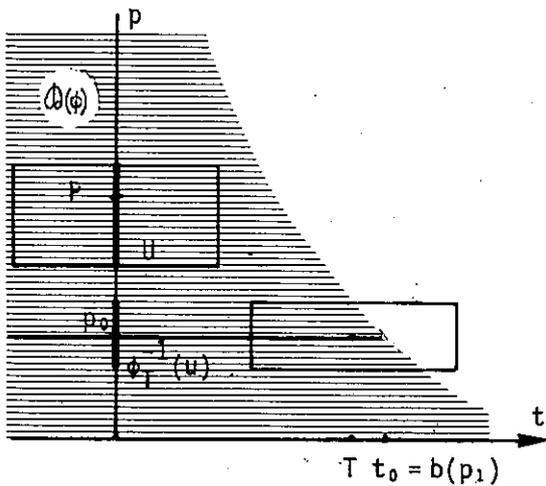
Si $P = \lim_{t \rightarrow b(p_0)} \phi(t, p_0)$ existe, alors il est possible de prolonger ϕ à un système dynamique local $\hat{\phi}$ défini au-delà de $b(p_0)$ par $\hat{\phi}(t, p_0) = \phi(t - b(p_0), p_0)$ (figure ci-dessus); telle est l'idée du théorème suivant.

7.2.7. Théorème (Théorème de prolongement)

Soit ϕ le système dynamique local maximal associé à X , défini sur $W = \bigcup_{p \in V}]a(p), b(p)[$. Si $\phi([0, b(p)[\times \{p\})$ est relativement compact, alors $b(p) = +\infty$.

7.2.7.

Preuve : (par l'absurde). Supposons que $b(p_0) = t_0 (< +\infty)$. Comme $\overline{\phi([0, b(p_0)] [p_0])}$ est compacte, il existe une suite $(t_n) [0, t_0[$, telle que $\lim t_n = t_0$ et telle que $\lim \phi(t_n, p) = P$ existe. Soit $] -\varepsilon, +\varepsilon[\times U$ un voisinage ouvert de $(0, P)$ contenu dans le domaine $\mathcal{D}(\phi)$ de ϕ . Soit $T = t_N$ un élément de la suite (t_n) tel que $|t_0 - T| < \varepsilon/2$ et $\phi(T, p_0) \in U$. Notons ϕ_T l'application $p \mapsto \phi_T(p) = \phi(\phi, T)$, soit $W = \phi_T^{-1}(U) \times]T - \varepsilon, T + \varepsilon[$, et définissons sur W la fonction $\hat{\phi}$ par $\hat{\phi}(t, q) = \phi(t - T, \phi(T, q))$. En vertu de la "remarque fondamentale", $t \mapsto \hat{\phi}(t, q)$ est une courbe intégrale de X , et elle est égale à $\phi(t, q)$ pour $t = T$. Par unicité les solutions ϕ et $\hat{\phi}$ sont donc égales sur toute la composante connexe de $(T, \phi_T(p_0))$ dans $\mathcal{D}(\phi) \cap W$. Comme $|t_0 - T| < \varepsilon/2$, W contient le point (t_0, P) : il est donc possible de prolonger par $\hat{\phi}$ le système dynamique local ϕ à un voisinage en brosse contenant le point (t_0, P) , ce qui contredit l'hypothèse que ϕ est maximal. CQFD.



7.3. LE THEOREME DE REDRESSEMENT

7.3.1. Qui a déjà intégré des équations différentielles ordinaires connaît l'importance des "changements d'inconnue". Du point de vue théorique, un changement d'inconnue est simplement un difféomorphisme local $y \mapsto \bar{x}(y)$ défini sur un ouvert de \mathbb{R}^n (correspondant généralement à un changement de carte d'une variété - voir exercice 7.E.6.) .

7.3.2. Proposition

Un difféomorphisme local $y \mapsto \bar{x}(y)$ échange les solutions de l'équation différentielle autonome $\dot{x} = f(x)$, en les solutions de l'équation différentielle autonome $\dot{y} = [D \bar{x}(y)]^{-1} [f \circ \bar{x}(y)]$.

Preuve : Pour une solution quelconque $x(t)$ de $\dot{x} = f(x)$, soit $y(t) = \bar{x}^{-1}(x(t))$. En appliquant la règle de dérivation des fonctions composées à $x = \bar{x} \circ y$, on a $D\bar{x}(y(t))[\dot{y}(t)] = \dot{x}(t) = f(x(t)) = f \circ \bar{x}(y(t))$, d'où découle la proposition en multipliant chaque membre de l'égalité par $[D\bar{x}(y(t))]^{-1}$. CQFD.

7.3.3. On aura noté, dans la preuve qui précède, que la clé du calcul consiste à exprimer l'ancienne inconnue (ici x) comme fonction de la nouvelle (ici y) et non le contraire. Plus que la proposition elle-même, c'est cette "astuce de calcul" qu'il convient de retenir.

7.3.4. Exemple

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(x_0) \neq 0$ et soit $y \mapsto L[y]$ un isomorphisme linéaire de \mathbb{R}^n tel que $L[e_1] = f(x_0)$, où $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$. On définit un difféomorphisme (global) \bar{x} de \mathbb{R}^n en posant $\bar{x}(y) = L[y] + x_0$.

7.3.5.

Par ce difféomorphisme, l'équation différentielle $\dot{x} = f(x)$ devient une équation différentielle $\dot{y} = g(y)$, telle que $g(0) = e_1$. Nous allons montrer qu'en fait, il est possible de choisir \bar{x} de façon que l'on ait $g(y) = e_1$ sur tout un voisinage. Le théorème qui suit constitue une reformulation géométrique des théorèmes d'existence, d'unicité et de différentiabilité des solutions d'une équation différentielle.

7.3.5. Théorème (Théorème de redressement)

Pour tout champ de vecteurs $\mathcal{C}^\infty X$ sur V , et tout $p_0 \in V$ tel que $X(p_0) \neq 0$, il existe une paramétrisation locale \bar{x} de V au voisinage de p_0 telle que l'expression $\dot{y} = g(y)$ de x dans la carte $\bar{y} = \bar{x}^{-1}$ soit $g(y) \equiv e_1 (= (1, 0, \dots, 0))$.

Preuve : Soit (1) : $\dot{x} = f(x)$ l'expression de X au voisinage de p au travers d'une carte locale quelconque. Soit $x_0 = x(p_0)$; comme $X(p_0) \neq 0$, on a $f(x_0) \neq 0$. Quitte à pratiquer un premier difféomorphisme (voir l'exemple ci-dessus (7.3.3.)), on peut supposer que $x_0 = 0$ et $f(x_0) = e_1$. Soit ϕ un système dynamique local \mathcal{C}^∞ associé à (1). Pour tout vecteur x de \mathbb{R}^n , notons le $x = (x_1, x_2)$ où $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}^{n-1}$ et de même pour y . On pose $\bar{x}(y_1, y_2) = \phi(y_1; 0, y_2)$. Comme ϕ est \mathcal{C}^∞ il en est de même de \bar{x} . On a

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial y_1}(0, 0) = \frac{d\phi}{dt}(0; 0, 0) = f(\phi(0; 0, 0)) = f(0) = e_1 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$$

et
$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial y_2}(0, 0) = D(y_2 \mapsto \phi(0; 0, y_2))(0) = D(y_2 \mapsto (0, y_2))(0) = (0, \text{Id}_{\mathbb{R}^{n-1}})$$

d'où $D\bar{x}(0, 0) = \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial y_1}, \frac{\partial \bar{x}}{\partial y_2} \right)(0, 0) = \text{Id}_{\mathbb{R}^n}$, qui est donc une application linéaire inversible. Par le théorème difféomorphisme local, \bar{x} est donc bien un difféomorphisme local.

Vérifions que l'équation (2) : $\dot{y} = g(y)$ obtenue par ce changement d'inconnue a bien la propriété souhaitée. Pour $y_2 \in \mathbb{R}^{n-1}$ quelconque, soit $y(t) = (t, y_2)$, et $x(t) = \bar{x}(y(t))$. Par définition de \bar{x} , on a $x(t) = \phi(t; 0, y_2)$, qui est donc solution de (1), et donc $y(t) = \bar{x}^{-1}(x(t))$ est solution de (2). On en déduit que pour tout (y_1, y_2) , $g(y_1, y_2) = \dot{y}(y_1) = (1, 0, \dots, 0)$, par définition de $y(t)$. CQFD.

7.E. EXERCICES

7.E.1. Former les systèmes d'équations caractérisant les champs de vecteurs associés aux équations différentielles suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x^2 + \sin t ; & \ddot{x} + x &= 0 ; & \ddot{x} + \sin x &= 0 ; \\ \ddot{x} + (x^2+1) \dot{x} + x &= 0 ; & \ddot{x} + \dot{x}^3/3 & & \dot{x} + x &= b \sin t ; \\ \dot{x} &= a(t) x^2 + b(t) x + c(t). \end{aligned}$$

7.E.2. Calculer les champs de vecteurs sur \mathbb{R}^2 associés aux systèmes dynamiques du 5.1.3. (voir définition au 5.1.5.).

7.E.3. Pour une famille de courbes de \mathbb{R}^2_{t-x} satisfaisant à $F(t, x, c_1, \dots, c_n) = 0$, avec $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ il est généralement possible de former une équation différentielle (non autonome) d'ordre n dont les courbes de la famille sont les graphes des solutions : on dérive n fois la relation $F = 0$ puis on élimine les constantes c_1, \dots, c_n à l'aide des n relations obtenues. Etablir ainsi les équations différentielles des familles de courbes suivantes :

$$x = at^3 ; \quad x = bt^2 + ce^t ; \quad x = (t-d)^3$$

7.E.4.

7.E.4. Montrer que $\phi : \bigcup_{p \in V}]a(p), b(p)[\times \{p\} \rightarrow V$ est un système dynamique local associé au champ X si et seulement si $\phi : \bigcup_{p \in V}]-b(p), -a(p)[\times \{p\} \rightarrow V$, défini par $\phi(t, p) = \phi(-t, p)$, est un système dynamique local associé au champ $-X$. [Calculer $d\phi / dt$]. En déduire un théorème de prolongement relatif à $a(p)$.

7.E.5. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, continue, localement lipschitzienne et bornée. Montrer que le champ sur \mathbb{R}^n associé à $\dot{x} = f(x)$ est complet. (Raisonnement par l'absurde, appliquer le théorème des accroissements finis et conclure avec le théorème de prolongement).

7.E.6. *Expression locale d'un champ de vecteurs défini sur une variété.*
On considère la sphère S^2 munie des deux cartes (x_1, x_2) et (y_1, y_2) définies sur la sphère privée respectivement du pôle nord et du pôle sud, pour lesquelles le changement de carte est donné par $x_1 = y_1 / (y_1^2 + y_2^2)$ et $x_2 = -y_2 / (y_1^2 + y_2^2)$ (i.e. si $x = x_1 + i x_2$ et $y = y_1 + i y_2$, alors $x = 1/y$).

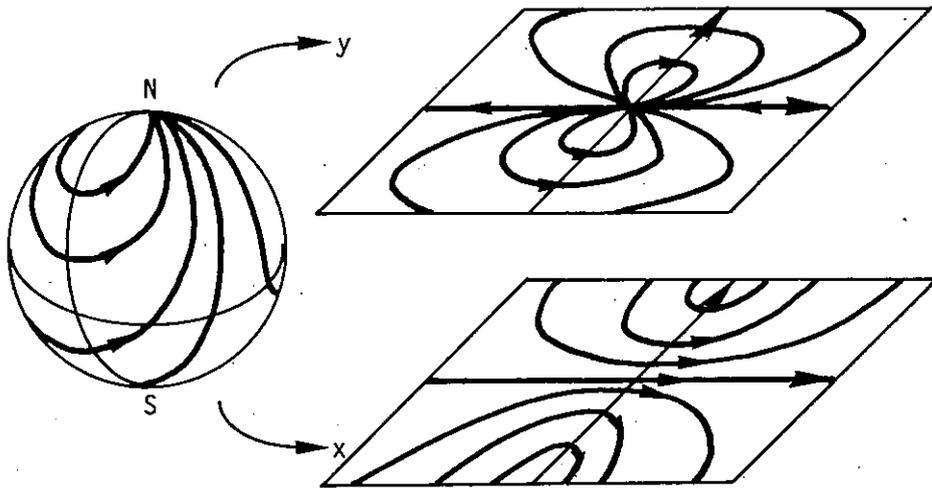
Déterminer le système Σy obtenu par ce changement d'inconnue à partir du système Σx suivant :

$$\Sigma x = \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 - x_2^2 + 1 \\ \dot{x}_2 = 2x_1 x_2 \end{cases} \quad \Sigma y = \begin{cases} \dot{y}_1 = ? \\ \dot{y}_2 = ? \end{cases}$$

Vérifier que le système Σy se prolonge continûment au point $(y_1, y_2) = (0, 0)$. En est-il de même pour le système $\Sigma' y$ associé de la même manière au champ $\Sigma' x$ suivant ?

$$\Sigma' x = \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^3 - 3x_1 x_2^2 \\ \dot{x}_2 = 3x_1^2 x_2 - x_2^3 \end{cases}$$

Commentaire : Ceci montre que le système Σx est l'expression dans la carte locale (x_1, x_2) d'un champ de vecteurs X défini sur la sphère S^2 toute entière, alors que ce n'est pas le cas pour le système $\Sigma'x$ (revoir 7.1.4.).



Le champ X est complet. Pourquoi ?

Vérifier que la fonction de \mathbb{R} dans S^2 définie par $(x_1(t), x_2(t)) = (\operatorname{tg} t, 0)$, pour $t \neq \pi/2 + k\pi$, et par $(y_1(t), y_2(t)) = (\operatorname{cotg} t, 0)$ pour $t \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), est solution de X .

8. STABILITÉ

Il existe plusieurs théories de stabilité pour les solutions des équations différentielles. Elles traitent toutes de la question du comportement des solutions lorsque t tend vers l'infini, le problème typique associé à cette question étant celle du futur du système solaire : par exemple, savoir si les planètes resteront toujours à distance bornée du soleil (stabilité au sens de LAGRANGES), si elles tourneront toujours approximativement sur la même orbite en repassant dans l'avenir par des positions arbitrairement proches des positions adoptées antécédemment (stabilité au sens de POISSON), ou encore de savoir si une petite perturbation venant de l'extérieur du système solaire risque ou non de modifier profondément le comportement général du système (stabilité structurelle). Nous aborderons ci-dessous les stabilités au sens de LAGRANGES et au sens de LYAPUNOV.

8.1. STABILITÉ AU SENS DE LAGRANGES

8.1.1. Définition

Soit γ une orbite d'un système dynamique ϕ sur une variété V . On dit que γ est *positivement stable au sens de LAGRANGES* si pour tout $p \in \gamma$, $\gamma^+(p)$ est compacte.

8.1.2. Proposition

Pour que γ soit positivement stable au sens de LAGRANGES, il faut et il suffit qu'il existe $p_0 \in \gamma$ tel que $\bar{\gamma}^+(p_0)$ soit compacte.

Preuve : La condition est évidemment nécessaire. Réciproquement, soit $p = \gamma(t, p_0)$ un élément quelconque de $\gamma = \gamma(p_0)$. On a $\gamma^+(p) = \phi([0, +\infty[, p) = \phi([0, +\infty[, \phi(t, p_0)) = \phi([t, +\infty[, p_0)$. Si $t \geq 0$, on a donc $\gamma^+(p) \subset \gamma^+(p_0) \subset \bar{\gamma}^+(p_0)$ qui est compact ; donc

$\overline{\gamma^+(p)}$ $\overline{\gamma^+(p_0)}$; $\overline{\gamma^+(p)}$ est donc fermée et contenue dans un compact ; elle est donc compacte. Si $t < 0$, $\overline{\gamma^+(p)} = \phi([t,0], p_0) \cup \overline{\gamma^+(p_0)}$; $\overline{\gamma^+(p)}$ est donc la réunion de deux compact ; elle est donc compacte. CQFD.

8.1.3. Théorème

Si γ est positivement stable au sens de LAGRANGES, alors, pour tout $p \in \gamma$, $\omega^+(p)$ est un compact non vide.

Preuve : Nous avons vu (5.3.3.) que $\omega^+(p) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\phi([t, +\infty[, p)}$.

Or, pour $t \geq 0$, on a $\overline{\phi([t, +\infty[, p)} \subset \overline{\gamma^+(p)}$. On voit que si $\overline{\gamma^+(p)}$ est compacte, $\omega^+(p)$ est intersection décroissante de compacts non vides ; $\omega^+(p)$ est donc bien un compact non vide. CQFD.

8.2. STABILITE AU SENS DE LYAPUNOV

Si un système dont l'évolution est régie par une équation différentielle présente une position d'équilibre ou un régime périodique, il peut être intéressant de savoir si cet équilibre ou ce régime périodique est stable, c'est-à-dire que tout état assez voisin à l'instant initial reste voisin quand t tend vers l'infini, ou mieux, tend vers cette position d'équilibre ou vers ce régime périodique. Telle est la question abordée par la stabilité au sens de LYAPUNOV.

8.2.1. Définition

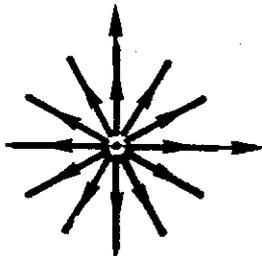
Soit γ un point stationnaire ou une trajectoire périodique d'un champ de vecteurs X sur une variété V . On dit que γ est *positivement stable au sens de LYAPUNOV* si tout le voisinage U de γ contient un voisinage U' de γ tel que la demi trajectoire positive de tout point de U' reste contenue dans U .

8.2.1. Définition (suite)

Si, de plus, on peut choisir U' de façon que pour tout $p \in U'$ on ait $\omega^+(p) = \gamma$, on dit que γ est positivement *asymptotiquement stable*.

8.2.2. Si, dans les définitions ci-dessous on substitue la locution "demi trajectoire négative" à "demi trajectoire positive", et $\omega^-(p)$ à $\omega^+(p)$ on obtient la définition d'une trajectoire *négativement stable* au sens de LYAPUNOV et celle d'une trajectoire *négativement asymptotiquement stable*. Notons que le changement d'inconnue $\tau = -t$, qui remplace le champ X par le champ $-X$, échange les deux notions. Il est dès lors facile de déduire de la théorie de la stabilité positive que nous allons aborder ci-dessous la théorie analogue pour la stabilité négative. Voici, sur quelques figures, des exemples de trajectoires stables ou non au sens de LYAPUNOV.

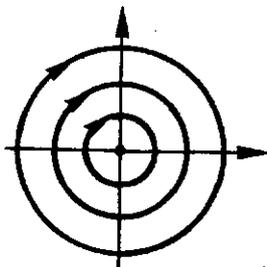
8.2.3.



$$\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = -y \end{cases}$$

Le point stationnaire $(0,0)$ est positivement asymptotiquement stable.

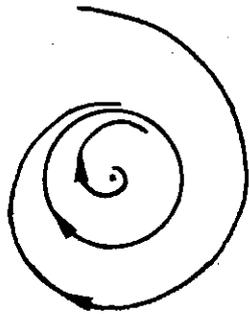
8.2.4.



$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x \end{cases}$$

Toutes les trajectoires sont positivement (et négativement) stables au sens de LYAPUNOV, mais aucune n'est asymptotiquement stable.

8.2.5.

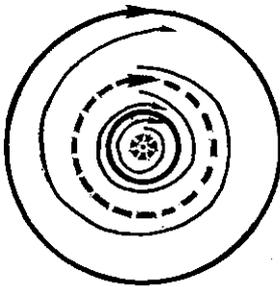


$$\begin{cases} \dot{\theta} = -1 \\ \dot{\rho} = \rho(1-\rho) \end{cases}$$

Le point stationnaire $(0,0)$ est négativement asymptotiquement stable et n'est pas positivement stable.

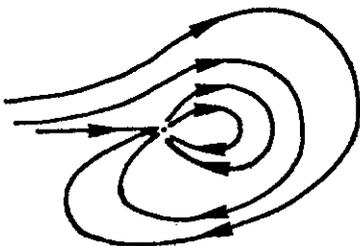
Le cycle-limite $\theta \equiv 1$ est positivement asymptotiquement stable, mais n'est pas négativement stable.

8.2.6.



L'exemple ci-contre ⁽¹⁾ présente une famille dénombrable de solutions périodiques s'accumulant sur le point stationnaire. Les solutions périodiques sont alternativement positivement asymptotiquement stables et négativement asymptotiquement stables. Le point stationnaire est positivement et négativement stable, mais pas asymptotiquement.

8.2.7.



Dans l'exemple ci-contre l'ensemble limite positif ω^+ de tout point du plan est égal au point stationnaire $\{(0,0)\}$ (qui de ce fait est dit attractif). Cependant le point stationnaire n'est pas stable au sens de LYAPUNOV, et a fortiori, n'est pas asymptotiquement stable.

⁽¹⁾ Il est assez aisé de donner un exemple de champ de vecteurs \mathcal{C}^∞ présentant ce portrait de phase. La question de savoir s'il existe un champ analytique ayant ce portrait de phase, que l'on a un temps cru résolue [H. DULAC, S.M.F. Bull. 51(1923), pp.45-188], reste ouverte à ce jour.

8.2.8. Comme \mathbb{R}^n est localement compact, tout compact de V admet un voisinage compact. Si γ_0 est positivement stable au sens de LYAPUNOV, en prenant pour U un voisinage compact de γ_0 , on voit que toute demi trajectoire positive issue de U reste dans U et est donc relativement compact. On en déduit, par le théorème de prolongement, que toute trajectoire positivement stable au sens de LYAPUNOV admet un voisinage U tel que toute solution maximale issue d'un point de U est définie jusqu'à $+\infty$; de plus, pour tout $p \in U$, comme $\gamma^+(p)$ est relativement compact, $\omega^+(p) \neq \emptyset$. Si de plus γ_0 est asymptotiquement stable, alors l'ensemble des p tels que $\omega^+(p) = \gamma_0$ est un ouvert appelé *bassin d'attraction* de γ_0 .

8.3. FONCTIONS ET THEOREME DE LYAPUNOV

8.3.1. L'étude qui suit est de nature locale. Nous supposons donc dorénavant que $V = \mathbb{R}^n$, dont nous notons les éléments comme à l'accoutumée $x_0, y_0, x = (x_1, \dots, x_n)$, etc ... Pour retrouver la théorie du cas d'une variété quelconque, il suffit d'interpréter x comme une carte locale, et x_0 comme $x(p_0)$.

8.3.2. Définition

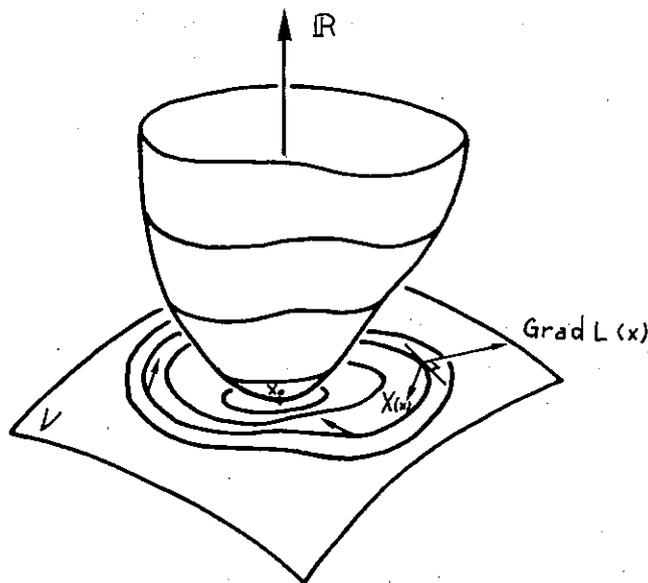
Soit x_0 un point stationnaire du champ X . Une fonction dérivable $L : V, x_0 \rightarrow \mathbb{R}^+$, définie au voisinage de x_0 , est appelée une *fonction de LYAPUNOV* pour X au point x_0 , si elle satisfait aux conditions suivantes :

- (i) $L(x_0) = 0$
- (ii) $L(x) > 0$ pour $x \neq x_0$
- (iii) $\text{Grad } L \cdot X$ est de signe constant

où $\text{Grad } L = (\partial L / \partial x_1, \dots, \partial L / \partial x_n)$.

Si, de plus, $\text{Grad } L(x) \cdot X(x) \neq 0$ pour $x \neq x_0$, on dit que L est une fonction de LYAPUNOV *stricte*.

8.3.3. Interprétation géométrique : Les conditions (i) et (ii) expriment qu'une fonction de LYAPUNOV pour X au point x_0 présente un minimum au point x_0 . Si ce minimum n'est pas dégénéré ($\det \text{Hess } f(x_0) \neq 0$), les courbes de niveau $\{L(x) = \text{Cste}\}$ de L se présentent donc, au voisinage de x_0 , comme des "ronds concentriques" entourant le point x_0 (voir figure ci-dessous) et le vecteur $\text{Grad } L(x)$ est un vecteur normal au point x à ces "ronds" pointé vers les L croissants, donc sortant. Le nombre $\text{Grad } L(x) \cdot X(x)$ est nul, positif ou négatif selon que $X(x)$ est orthogonal à $\text{Grad } L(x)$, situé du même côté ou du côté opposé de l'espace orthogonal à $\text{Grad } L(x)$. Or cet espace est précisément l'espace tangent à la courbe de niveau $L = \text{Cste}$, passant par x . La fonction L satisfaisant à (iii), on voit que le champ est donc soit toujours rentrant dans les courbes de niveau (cas $\text{Grad } L \cdot X < 0$), soit toujours sortant (cas $\text{Grad } L \cdot X > 0$). Le théorème suivant est dès lors intuitif :



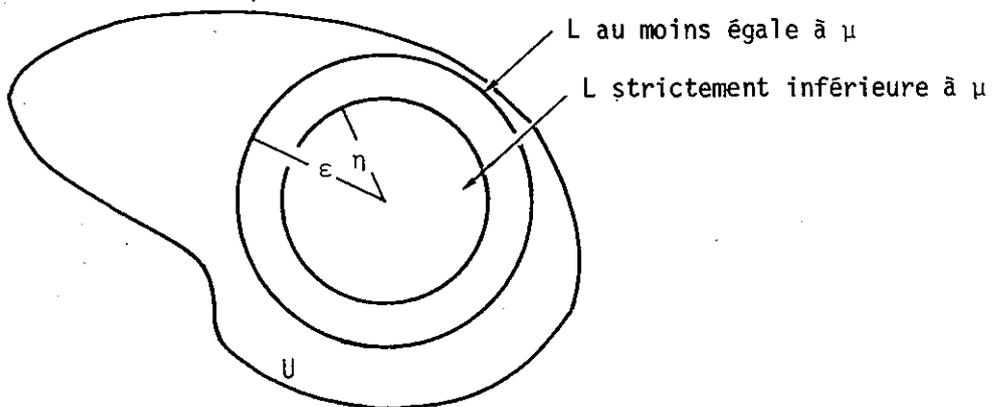
8.3.4.

8.3.4. Théorème (LYAPUNOV)

Si X admet une fonction de LYAPUNOV L au point stationnaire x_0 , et si $\text{Grad } L(x) \cdot X(x) \leq 0$ pour tout x , alors x_0 est positivement stable au sens de LYAPUNOV. Si de plus L est une fonction de LYAPUNOV stricte, cette stabilité est asymptotique.

Preuve : Notons tout d'abord que si $t \mapsto x(t)$ est une trajectoire de X dont l'image est contenue dans le domaine de L , alors, par la règle de dérivation des fonctions composées, $d(L \circ x) / dt = (\text{Grad } L \cdot X)(x(t)) \leq 0$, d'où il ressort que L est décroissante sur les trajectoires.

Soit à présent U un voisinage quelconque de x_0 et $\varepsilon > 0$ tel que la boule fermée $\bar{B}(x_0, \varepsilon)$ soit contenue dans U . Soit μ le minimum de L sur la sphère $S(x_0, \varepsilon)$. Comme cette dernière est compacte, il existe $x_1 \in S(x_0, \varepsilon)$ tel que $\mu = L(x_1) > 0$, puisque $x_1 \neq x_0$.



Comme L est continue et que $L(x_0) = 0$, il existe un $\eta > 0$, $\eta < \varepsilon$, tel que $L(x) < \mu$ pour tout x appartenant à la boule ouverte $B(x_0, \eta)$, qu'il suffit de choisir pour voisinage U' . En effet, pour toute trajectoire x de X issue pour $t = 0$ de U' , d'après la remarque liminaire, on a pour tout $t \geq 0$, $L(x(t)) \leq L(x(0)) < \mu$, ce qui montre que la demi trajectoire positive de $x(0)$ ne peut rencontrer la sphère $S(x_0, \varepsilon)$ (sur laquelle L est au moins égale à μ) et reste donc contenue dans $B(x_0, \varepsilon)$, donc dans U . Le point stationnaire x_0 est donc positivement stable.

Montrons enfin que si L est une fonction de LYAPUNOV stricte, alors x_0 est asymptotiquement stable. Nous avons vu que L est décroissante sur les trajectoires; comme L est positive, la limite, quand t tend vers $+\infty$ de $L(x(t))$ existe donc; soit l cette limite. On a donc $\omega^+(x(0)) \subset L^{-1}(l)$. Comme $\omega^+(x(0))$ est invariant (5.3.2.) et non vide (8.1.3.), soit ξ une trajectoire quelconque contenue dans $\omega^+(x(0))$. Pour tout t , on a $L(\xi(t)) = l = \text{constante}$. D'où $(\text{Grad } L \cdot X)(\xi(t)) = d(L \circ \xi)/dt = 0$. Comme L est une fonction de LYAPUNOV stricte, ceci implique que $\xi(t) = x_0$ et donc $\omega_+(x) = x_0$, pour tout $x \in U'$. CQFD.

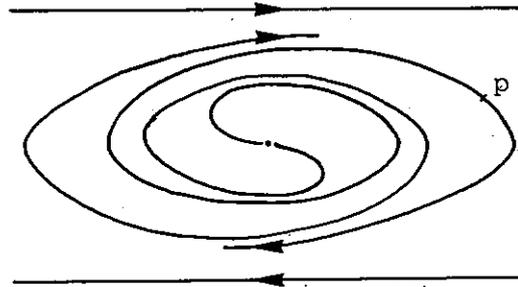
8.E. EXERCICES

8.E.1. Etudier la stabilité au sens de LAGRANGES des trajectoires des systèmes dynamiques associés aux exemples 8.2.3. à 8.2.6.

8.E.2. Il est possible de montrer que si $\omega^+(p)$ est compact, alors il est connexe ⁽¹⁾. Vérifier ce théorème sur les exemples 8.2.3. à 8.2.6. Que peut-on dire de $\omega^+(p)$ dans l'exemple suivant ?

⁽¹⁾ voir par exemple NEMYTSKII (V.V.) et STEPANOV (V.V.) "Qualitative theory of differential equations", Princeton University Press (1960) p.342.

8.E.3.



8.E.3. On dit qu'une fonction $I: V \rightarrow \mathbb{R}$ est une intégrale première d'un champ de vecteur X sur V si pour toute courbe intégrale γ de X , la fonction $I \circ \gamma$ est constante.

- (i) Montrer que l'ensemble des intégrales premières de X forme un espace vectoriel.
- (ii) Montrer que toute intégrale première satisfaisant aux conditions (i) et (ii) des fonctions de LYAPUNOV et une fonction de LYAPUNOV.
- (iii) Un point stationnaire x_0 de X admettant une intégrale première de X pour fonction de LYAPUNOV peut-il être asymptotiquement stable ?

8.E.4. Soit $s: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, telle qu'on ait $x \cdot s(x) > 0$ pour x voisin de zéro, $x \neq 0$. Etudier la stabilité au sens de LYAPUNOV du point stationnaire $(0,0)$ du champ de vecteur associé, dans le plan de phase $(y = \dot{x})$, aux équations suivantes :

- (1) $\ddot{x} + s(x) = 0$
- (2) $\ddot{x} + \dot{x} + s(x) = 0$
- (3) $\ddot{x} + (x^2 - a)\dot{x} + x = 0$
- (4) $\ddot{x} + (x^2 - 1)\dot{x} + x - a = 0$.

Indications : pour (1) et (2) poser $L(x,y) = S(x) + y^2/2$, avec $S(x) = \int_0^x s(t)dt$; L est l'énergie mécanique totale de l'oscillateur (1).
pour (3) poser $L(x,y) = x^2 + y^2$
pour (4), avec $a \neq \pm 1$, adapter l'indication pour (3) ; pour $a = 1$, poser $L(x,y) = (x-1)^2 + y - \log \sqrt{1+2y}$.

8.E.5.* Stabilité au sens de Poisson : On dit que l'orbite $\gamma(p)$ d'un point p est positivement stable au sens de Poisson si $\gamma(p) \subset \omega^+(p)$.
Pour les exemples du 5.1.3. et du 8.2.3. au 8.2.7., indiquer quels sont les points dont l'orbite est positivement stable au sens de Poisson.

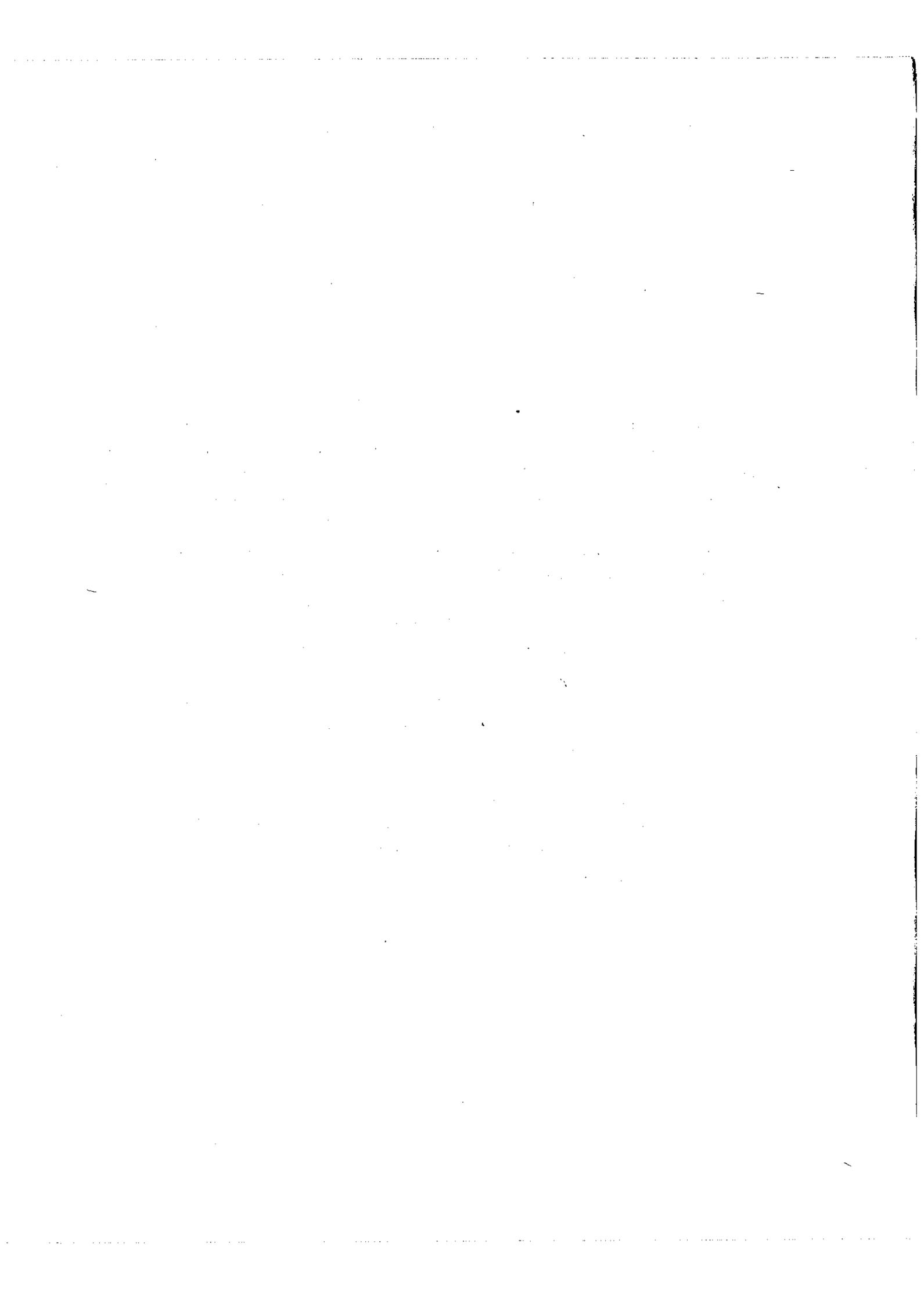
TROISIÈME PARTIE

LINÉARISATION

C'est une idée assez communément admise que les équations différentielles linéaires sont mieux connues et comprises que les non linéaires, et qu'il existerait une "théorie générale des équations linéaires", alors qu'on s'accorde plus volontiers à reconnaître que le problème reste largement ouvert pour les équations non-linéaires. A l'origine de cette méprise se trouve certainement en bonne part le grand nombre de méthodes de résolution dans le cas autonome, dont nous avons rencontré certaines dans la première partie. Par ailleurs, il est indéniable qu'un certain nombre de problèmes locaux des équations non linéaires peuvent être "réduits" à un problème relatif à un système linéaire, puis être résolus ; ceci a également dû accréditer l'idée mentionnée plus haut.

Plutôt qu'à une hypothétique théorie des équations linéaires, cette troisième et dernière partie est consacrée à des résultats de nature locale s'obtenant par linéarisation.

Il ne faudrait bien sûr pas conclure de ce qui précède que les équations linéaires n'ont aucunes propriétés particulières ! Nous allons commencer par décrire les plus importantes de ces propriétés, étude qui se poursuivra au chapitre 12.



9. EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

9.1. DOMAINE DE DEFINITION DES SOLUTIONS

9.1.1. On appelle *équation différentielle linéaire* (réelle) sur \mathbb{R}^n une équation du type suivant :

$$(1) \quad \dot{x} = A(t) \cdot x$$

où $t \mapsto A(t)$ est une fonction définie sur un intervalle ouvert $J =]a, b[$, à valeur dans l'espace $\mathcal{M}_0(n, n)$ des matrices carrées réelles d'ordre n . Si $|x|$ désigne la norme euclidienne de $x \in \mathbb{R}^n$, on munit $\mathcal{M}_0(n, n)$ d'une norme, notée $\| \cdot \|$, telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $|A \cdot x| \leq \|A\| \cdot |x|$. De façon générale, nous supposons que la fonction $t \mapsto A(t)$ est continue sur J , ce qui entraîne que la fonction $(t, x) \mapsto f(t, x) = A(t) \cdot x$ de $J \times \mathbb{R}^n$ dans \mathbb{R}^n est continue, et localement lipschitzienne en x ; (utiliser que J est localement compact : on posant $k = \text{Sup } \|A(t)\|$ pour $t \in K$ compact de J , f est k -lipschitzienne en x sur $K \times \mathbb{R}^n$). Les équations différentielles linéaires bénéficient donc des conclusions des théorèmes d'existence et d'unicité des solutions. Une propriété remarquable des équations linéaires est, qu'en fait, l'existence des solutions est globale.

9.1.2. Théorème fondamental

Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$, et tout $t_0 \in J$, il existe une solution x de (1) définie sur tout J , telle que $x(t_0) = x_0$.

9.1.3. Remarque : La différence essentielle entre ce théorème et celui du cas analytique (2.1.2.) réside évidemment dans le fait qu'on ne suppose pas analytique la fonction $t \mapsto A(t)$; même si A est analytique en tout point $t \in \mathbb{R}(c\mathbb{C})$, le rayon de convergence du développement de A peut être fini en tout point (du fait des singularités complexes de A).

9.1.4. Lemme : Soit k tel que $\|A(t)\| \leq k$ pour tout t d'un intervalle K contenant t_0 et contenu dans J . Alors pour toute solutions de (1) définie sur K , on a $|x(t)| \leq |x(t_0)| \cdot e^{k|t-t_0|}$.

Preuve du lemme : On notant que pour la norme euclidienne, où $|x|^2 = x \cdot x$ (produit scalaire), on a les inégalités suivantes :

$$(|x(t)|^2)' = 2 x(t) \cdot x'(t) \leq 2 |x(t)| |x'(t)| \leq 2 \|A(t)\| |x(t)|^2 \leq 2k |x(t)|^2$$

Si $x(t_0) = 0$, alors $x(t) \equiv 0$, puisque la fonction nulle est une solution évidente de (1). Si $x(t_0) \neq 0$, par unicité des solutions, x ne s'annule pas sur son domaine de définition : soit $L(t) = \log |x(t)|^2$. D'après les inégalités ci-dessus, on a, sur K_0 , $L'(t) \leq 2k$, d'où par le théorème des accroissements finis $L(t) \leq L(t_0) + 2k|t-t_0|$. En exprimant l'exponentielle des deux membres, on obtient le résultat annoncé. CQFD.

9.1.5. Preuve du théorème : Soit X le champ de vecteur associé à l'équation (non autonome) (1) : $X(s,x) = (1, A(s)x)$. Soit $\phi = (\tau, \xi)$ le système dynamique maximal associé à X , qui est défini sur un "voisinage en brosse" du type $\cup]a(p), b(p)[\times \{p\}$, pour $p = (t,x) \in J \times \mathbb{R}^n$.

Comme $\dot{s} = 1$, on a $\tau(s; t_0, x_0) = s + t_0$, et comme $\dot{x} = A(s)x$, on voit que $t \mapsto \bar{x}(t) = \xi(t-t_0; t_0, x_0)$ est la solution de (1) telle que $\bar{x}(t_0) = x_0$. Il convient de montrer que \bar{x} est définie sur tout $J =]a, b[$ c'est-à-dire $a(t_0, x_0) - t_0 = a$ et que $b(t_0, x_0) - t_0 = b$.

Supposons par l'absurde qu'il n'en soit pas ainsi et, par exemple, que $b(t_0, x_0) - t_0 < b$. Dans ce cas, pour $s \in]0, b(t_0, x_0)[$, $\tau(s; t_0, x_0)$ appartient au compact $K = [t_0, t_0 + b(t_0, x_0)] \subset]a, b[$, et, d'après le lemme, $\xi(s; t_0, x_0)$ reste dans la boule compacte centrée en 0 et de rayon $|x_0| \exp(k|b(t_0, x_0) - t_0|)$, où k désigne en majorant de $\|A(t)\|$ sur K . La "demi trajectoire positive" $\phi([0, b(t_0, x_0)[; t_0, x_0)$ est donc relativement compact ce qui entraîne par le théorème de prolongement, que $b(t_0, x_0) = +\infty$, ce qui contredit l'hypothèse que $b(t_0, x_0) < t_0 + b$. CQFD.

9.2.1.

9.2. L'ESPACE VECTORIEL DES SOLUTIONS

9.2.1. Du fait que l'équation différentielle (1) est linéaire, on voit facilement que toute combinaison linéaire de solutions de (1) définies sur J est encore une solution de (1). L'ensemble de ces solutions forme donc un espace vectoriel \mathcal{E} , sous-espace de l'espace des fonctions continûment différentiables.

9.2.2. Proposition

| L'espace vectoriel \mathcal{E} des solutions de (1) est de dimension n .

Ceci découle facilement du lemme suivant :

9.2.3. Lemme : Soient x^1, \dots, x^p dans \mathcal{E} . Les trois conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) il existe $t_0 \in J$ tel que $x^1(t_0), \dots, x^p(t_0)$ sont indépendants dans \mathbb{R}^n .
- (ii) pour tout $t \in J$, $x^1(t), \dots, x^p(t)$ sont indépendants dans \mathbb{R}^n .
- (iii) x^1, \dots, x^p sont indépendants dans \mathcal{E} .

Preuve du lemme : (ii) \implies (i) et (i) \implies (iii) sont évidents.

(iii) \implies (ii) découle de ce que si une combinaison linéaire $x = \sum_{i=1}^p \lambda_i x^i$ de solution de (1) s'annule au point (t_0) , alors par unicité des solutions, la solution x est identiquement nulle.

Preuve de la proposition : Soient $t_0 \in J$ et $P : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^n$, définie par $P(x) = x(t_0)$. L'application P est clairement linéaire, surjective d'après le théorème (9.1.2.) et injective d'après le lemme (9.2.3.). CQFD.

9.3. SOLUTIONS MATRICIELLES ET MATRICE RESOLVANTE

9.3.1. Si $x^1, \dots, x^j, \dots, x^p$ sont p solutions de l'équation (1), la matrice $X = (x_i^j)$ dont les colonnes sont constituées par les vecteurs x^1, \dots, x^p constitue une fonction dérivable de J dans l'espace $\mathcal{M}(n, p)$ des matrices à n lignes et p colonnes. Il est facile de voir que la matrice $\dot{X}(t)$ des dérivées est égale à $A(t) \cdot X(t)$. En effet, le fait que x^j est solution de (1) équivaut au fait que pour tout $i = 1, \dots, n$, $\dot{x}_i^j = \sum_{k=1}^n a_i^k x_k^j$, où $A(t) = (a_i^j(t))$. En d'autres termes, la matrice X est solution de l'équation

$$(I) \quad \dot{X} = A(t) \cdot X$$

appelée équation matricielle sur $\mathcal{M}(n, p)$ associée à l'équation (1).

9.3.2. Notons que si $p = 1$, on retrouve évidemment l'équation (1), et que ce qui précède est valable pour toute valeur entière de p , plus petite, égale ou plus grande que n . Le cas $p = n$ est cependant le plus important, compte tenu du fait que l'espace \mathcal{E} des solutions de (1) est de dimension n . En effet, $p = n$ est le nombre maximal d'éléments d'une famille libre de solutions de (1), et toute solution de (1) est combinaison linéaire des éléments d'une telle famille, que l'on appelle dès lors une *famille fondamentale de solutions*. Une matrice X dont les colonnes forment une telle famille fondamentale de solutions s'appelle, par analogie, une *matrice fondamentale* de solutions de (1). D'après la propriété (ii) du lemme ci-dessus (9.2.3.), si X est une matrice fondamentale, alors pour tout $t \in J$, $X(t)$ est inversible. Inversement, si X est une matrice carrée solution de l'équation matricielle (I), d'après la condition (i) du même lemme, pour que X soit une matrice fondamentale, il suffit que X soit irréversible à "l'instant initial" t_0 . Le cas où $X(t_0) = Id$ porte le nom de matrice résolvante :

9.3.3.

9.3.3. Définition

On appelle *matrice résolvante de (1)* relative à l'instant t_0 , la solution matricielle $t \mapsto Z(t, t_0)$ telle que $Z(t_0, t_0) = \text{Id}$.

9.3.4. Le terme de "résolvante" s'explique par le fait que toute solution $x(t)$ s'obtient en effectuant $Z(t, t_0) x(t_0)$, et que $Z(t, t_0)$ permet de résoudre par quadrature les "équations linéaires avec second membre" (voir exercice 9.E.5. ci-dessous). L'existence de la matrice résolvante découle immédiatement du théorème fondamental (9.1.2.). Soulignons cependant que, sauf pour le cas où A est constante, où la matrice résolvante est égale à $\exp(t-t_0)A$ (voir 7.2.6,3. ci-dessus), il n'existe pas de méthode générale pour déterminer la matrice résolvante, ou, ce qui revient au même, déterminer n solutions indépendantes de (1). Notons enfin que si $X(t)$ est une matrice fondamentale, la fonction matricielle $t \mapsto X(t) X(t_0)^{-1}$ est la solution de (I) égale à Id pour $t = t_0$, et de ce fait, est égale à $Z(t, t_0)$.

9.3.5. Proposition

- (i) Pour tout t_0 dans J , $Z(t_0, t_0) = \text{Id}$
- (ii) Pour tous t, t_0 et t_1 dans J , $Z(t, t_0) \cdot Z(t_0, t_1) = Z(t, t_1)$
- (iii) Pour tous t_0, t_1 dans J , $Z(t_0, t_1)^{-1} = Z(t_1, t_0)$.

Preuve : (i) est vrai par définition, et (iii) découle immédiatement de (ii). Pour établir (ii), il suffit d'observer que les deux membres de l'identité sont solution de (I), qu'ils sont égaux pour $t = t_0$ est conclure par unicité des solutions de (I). CQFD.

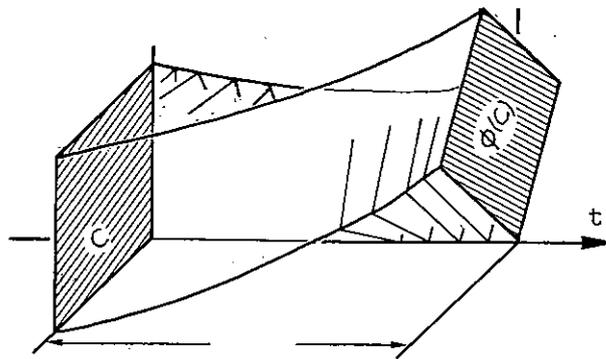
9.4. WRONSKIEN ET FORMULE DE LIOUVILLE

9.4.1. Pour toute matrice résolvente $Z(t, t_0)$ de (1), appelons Wronskien ⁽¹⁾ la fonction $W : J \rightarrow \mathbb{R}$, définie par

$$W(t) = \det Z(t, t_0) .$$

9.4.2. Interprétation géométrique

Rappelons que le déterminant de n vecteurs de \mathbb{R}^n est égal au volume (ou à l'aire, si $n = 2$) algébrique du parallélépipède (ou parallélogramme) construit sur ces n vecteurs. Comme $Z(t, t_0)$ est la matrice dont les colonnes sont les solutions de (1) issues, pour $t = t_0$, des vecteurs de la base canonique, le Wronskien $W(t)$ est donc égal au volume du parallélépipède, image $\phi(t, C)$, après un temps $t - t_0$ du cube unité C (la linéarité de ϕ par rapport à la condition initiale x entraîne que l'image du cube construit sur $\{e_1, \dots, e_n\}$ est égale au parallélépipède construit sur $\{\phi(t, e_1), \dots, \phi(t, e_n)\}$).



9.4.3. Théorème

Le Wronskien W est solution de l'équation différentielle linéaire $\dot{\omega} = \text{Trace } A(t) \cdot \omega$.

⁽¹⁾ d'après le mathématicien H. WRONSKI (1778-1853).

9.4.4. Lemme : $\det Z(t+\delta, t) = 1 + \delta(\text{Trace } A(t) + o(\delta)) + \delta^2 O(\delta)$.

Preuve du lemme : Comme $t \mapsto Z(t, s)$ est solution de (I), on a
 $(Z(t+\delta, t) - Z(t, t)) / \delta = A(t) Z(t, t) + \alpha(\delta)$, avec $\alpha \approx 0$. On en déduit
 que $\det Z(t+\delta, t) = \det (\text{Id} + \delta(A(t) + \alpha)) := \det (C_{ij})$, avec
 $C_{ij} = \delta_{ij} + \delta b_{ij} = \delta_{ij} + \delta(a_{ij} + \alpha_{ij})$, où δ_{ij} est le symbole de Kronecker,
 $A(t) = (a_{ij}(t))$ et $\alpha = (\alpha_{ij})$. Notons \mathfrak{S}_n le groupe des permutations
 $\{1, \dots, n\}$ et \mathfrak{S}_n^* ce groupe privé de l'identité. On a

$$\det Z(t+\delta, t) = C_{11} \dots C_{nn} + \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n^*} \varepsilon(\sigma) C_{1\sigma(1)} \dots C_{n\sigma(n)}$$

$$\begin{aligned} \text{Or } C_{11} \dots C_{nn} &= [1 + \delta(a_{11} + \alpha_{11})] \dots [1 + \delta(a_{nn} + \alpha_{nn})] = 1 + \delta(\sum_i (a_{ii} + \alpha_{ii})) + \delta^2 O_1(\delta) \\ &= 1 + \delta(\text{Trace } A + O(\delta)) + \delta^2 O(\delta) \end{aligned}$$

par ailleurs, en notant que, si une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ "déplace" un élément i (i.e. $\sigma(i) \neq i$) elle déplace également l'élément $j = \sigma(i)$, on voit que chacun des termes de la somme sur $\sigma \in \mathfrak{S}_n^*$ comporte au moins deux facteurs $C_{i\sigma(i)}$ ayant δ en facteur (car $\delta_{i\sigma(i)} = 0$) et donc

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n^*} \varepsilon(\sigma) C_{1\sigma(1)} \dots C_{n\sigma(n)} = \delta^2 O_2(\delta) \quad \text{CQFD.}$$

Preuve du théorème : Par définition

$$[W(t+\delta) - W(t)] / \delta = [\det Z(t+\delta, t_0) - \det Z(t, t_0)] / \delta, \text{ d'où}$$

$$[W(t+\delta) - W(t)] / \delta = [\det Z(t+\delta, t) Z(t, t_0) - \det Z(t, t_0)] / \delta$$

$$= [\det Z(t+\delta, t) - 1] \det Z(t, t_0) / \delta$$

$$= [\text{Trace } A(t) + o(\delta) + \delta O(\delta)] \cdot W(t), \text{ d'après le lemme.}$$

En passant à la limite sur $\delta \rightarrow 0$, on obtient le résultat annoncé. CQFD.

9.4.5. Corollaire (Formule de LIOUVILLE)

$$W(t) = e^{\int_{t_0}^t \text{Trace } A(s) ds}$$

Preuve : Par définition $W(t_0) = \det Z(t_0, t_0) = 1$; le membre de droite de l'identité n'est autre que la solution de $\dot{W} = \text{Trace } A(t) W$ égale à 1 pour $t = t_0$. CQFD.

9.5. APPLICATION AUX EQUATIONS D'ORDRE n

9.5.1. Soient y_1, \dots, y_n n fonctions définies et (n-1) fois dérivables sur un intervalle J de \mathbb{R} . On appelle *déterminant wronskien* de ces n fonctions la fonction $Wron(y_1, \dots, y_n) : J \rightarrow \mathbb{R}$, où

$$Wron(y_1, \dots, y_n)(t) = \det \begin{pmatrix} y_1 & \cdot & \cdot & y_n \\ y_1' & \cdot & \cdot & y_n' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n-1)} & \cdot & \cdot & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

9.5.2. Au 2.2. nous avons vu comment, en posant $x_j = y^{(j-1)}$, associer un système (1) $\dot{x} = A(t) x$ à l'équation linéaire d'ordre n
 (2) $y^{(n)} = a_0(t) y + \dots + a_{n-1}(t) y^{(n-1)}$.

Si les fonctions y_1, \dots, y_n sont solutions de (2), $Wron(y_1, \dots, y_n)$ n'est autre que le déterminant de la solution matricielle X de (1), associée à ces n solutions de (2). La formule de LIOUVILLE donne alors :

9.5.3. Corollaire (Identité d'ABEL⁽¹⁾)

$$Wron(y_1, \dots, y_n)(t) = Wron(y_1, \dots, y_n)(t_0) e^{\int_{t_0}^t a_{n-1}(s) ds}$$

Preuve : On voit facilement (exercice 9.E.2.) que
 $X(t) = Z(t, t_0) X(t_0)$

(¹) ABEL (N.H.), J. für Math. 2 (1827).

9.E.1.

où $Z(t, t_0)$ désigne la matrice résolvante du système (1) associé à (2).
On en déduit que

$$\det X(t) = \det Z(t, t_0) \cdot \det X(t_0)$$

ou encore, par définition de W et de $Wron$:

$$Wron(y_1, \dots, y_n)(t) = W(t) \cdot Wron(y_1, \dots, y_n)(t_0)$$

En observant sur 2.2.2. que $\text{Trace } A(s) = a_{n-1}(s)$, l'identité d'ABEL découle alors immédiatement de la formule de LIOUVILLE. CQFD.

9.E. EXERCICES

9.E.1. En s'inspirant de la remarque 9.1.3., montrer que si $A(t)$ est analytique en tout point $t \in \mathbb{R}$, alors pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$, l'équation $\dot{x} = A(t)x$ admet une solution $t \mapsto x(t)$, telle que $x(0) = x_0$, et qui est analytique en tout point de \mathbb{R} .

9.E.2. Montrer que l'équation (I) du 9.3. constitue une équation $\dot{X} = f(t, X)$ définie sur $J \times \mathcal{M}(n, p)$, où f est continue et localement lipschitzienne en X .

9.E.3. Montrer que pour toute solution x de (1), on a
 $x(t) = Z(t, t_0) \cdot x(t_0)$
De même, montrer que pour toute solution X de (I), on a :
 $X(t) = Z(t, t_0) \cdot X(t_0)$.

9.E.4. Montrer que Z est une solution ($\in GL(n)$) de (I), si et seulement si ${}^t Z^{-1}$ est solution de $\dot{Y} = -{}^t A(t) Y$ [l'équation (1*) :
 $\dot{y} = -{}^t A(t)y$ s'appelle l'équation adjointe de l'équation $\dot{x} = A(t)x$].

9.E.5. On appelle équation linéaire avec second membre toute équation du type (2) $\dot{y} = A(t)y + b(t)$, où $A(t) \in \mathcal{M}(n,n)$ et $b(t) \in \mathbb{R}^n$, les fonctions A et b étant supposées définies et continues sur un intervalle ouvert J ; l'équation (1) : $\dot{x} = A(t)x$ s'appelle l'équation homogène associée à (2).

(i) Montrer que $f(t,y) = A(t)y + b(t)$ est continue et localement lipschitzienne en x .

(ii) Montrer que si $Z(t,t_0)$ désigne la matrice résolvante de (1), alors pour toute solution y de (2), on a $y(t) = Z(t,t_0) \cdot y(t_0) + Z(t,t_0) \cdot \int_{t_0}^t Z(t_0,s) \cdot b(s) ds$. [On peut retrouver ce résultat par la "méthode de variation des constantes" en recherchant une solution y sous la forme $y(t) = Z(t,t_0) \cdot C(t)$ et en déterminant la fonction C .]

9.E.6. Montrer que le déterminant wronskien d'une famille quelconque de n solutions de (1) est solution de l'équation $\dot{\omega} = \text{Trace } A(t) \omega$.

9.E.7. Existe-t-il une équation différentielle linéaire du second ordre définie sur tout \mathbb{R} dont les fonctions $y^1(t) = t^2 + 1$ et $y^2(t) = e^t$ soient toutes les deux solutions ? [Indication : former le déterminant wronskien de y_1 et y_2].

9.E.8. On suppose que toutes les solutions de $y'' = a(t)y' + b(t)y$ tendent vers zéro quand t tend vers $+\infty$. Montrer que dans ce cas, la fonction a , que l'on suppose continue, n'est pas intégrable sur $[0, +\infty[$. [Indication : appliquer l'identité d'ABEL].

9.E.9. Réduction de l'ordre d'une équation linéaire du second ordre. Si y_0 est une solution particulière d'une équation différentielle linéaire du second ordre (2) $\ddot{y} = a_0(t)y + a_1(t)\dot{y}$, l'identité d'ABEL appliquée au déterminant wronskien $\Delta(t) = y\dot{y}_0 - \dot{y}y_0$ permet de substituer à (2) l'équation linéaire à second membre $\dot{y}y_0 = y\dot{y}_0 - C e^{\int a_0(t) dt}$, où $a(t) = \int_{t_0}^t \text{Trace } A(s) ds$ et $C \in \mathbb{R}$.

Application : Trouver la solution générale des équations du second ordre suivante :

9.E.10.1. $t^2(1+t)\ddot{y} = 2y$ ($y_0 = 1 + 1/t$)

9.E.10.2. $t\ddot{y} = (1+2t)\dot{y} - (1+t)y$ ($y_0 = e^t$)

9.E.10.3. $(2t^2-1)\ddot{y} = 2\dot{y} + 4y$ ($y_0 =$ un polynôme de degré 2 à déterminer).

9.E.10. Rappelons qu'on appelle équation de RICCATI toute équation du type suivant :

$$(3) \quad \dot{u} = a_2(t)u^2 + a_1(t)u + a_0(t)$$

où les a_i désignent des fonctions définies sur un intervalle J , à valeur dans \mathbb{R} , qu'on supposera dérivables. Montrer que $u = -\dot{y}/a_2(t)y$ est solution d'une équation linéaire du second ordre. y défini par

9.E.11. Equation de RICCATI associée à une équation linéaire du second ordre. Du fait que l'équation (2) : $y'' = a(t)y + b(t)y'$ est linéaire, si y_0 est solution de (2), il en est de même de toutes les fonctions λy_0 , pour $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour éviter cette "redondance", on peut introduire la nouvelle inconnue $u = y'/y$, qui identifie en une seule solution $u = y'_0 / y_0$ tous les éléments de la "droite épointée" $\{\lambda y_0 | \lambda \in \mathbb{R}^*\}$.

(i) Montrer que la nouvelle inconnue $u = y'/y$ est solution de l'équation de RICCATI (3) $u' = a(t) + b(t)u - u^2$.

(ii) Réciproquement, montrer que si u est solution de (3), alors $y = \lambda e^{U(t)}$ est solution de (2) pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $U(t) = \int_{t_0}^t u(s) ds$. [notons que faute de connaître une solution particulière de l'une ou l'autre des deux équations (2) ou (3), ce qui précède ne permet généralement pas pour déterminer, par quadrature, la solution générale de ces équations].

10. POINTS STATIONNAIRES

10.1. CLASSIFICATION DES SYSTEMES LINEAIRES A COEFFICIENTS CONSTANTS

10.1.1. La classification d'une catégorie d'objets consiste d'une part à préciser à quelle condition deux objets sont "isomorphes", et d'autre part, à regrouper les objets par classes d'isomorphisme, c'est-à-dire, en pratique, à rechercher ce que l'on appelle un invariant caractéristique, c'est-à-dire une manière si possible simple de reconnaître si deux objets sont isomorphes ou non. Dans le cas des champs de vecteurs, les diverses notions d'isomorphismes sont celles de conjugaison (topologiques, différentiable, linéaire), qui consistent à déclarer isomorphes deux champs qui se correspondent par un changement d'inconnue (voir 3.3.1.).

10.1.2. Définition

On dit que deux champs de vecteurs X et Y sur une variété V sont (topologiquement) *conjugués* si et seulement si il existe un homéomorphisme h de V tel que, pour tous systèmes dynamiques locaux ϕ et ψ associés à X et Y respectivement, on a $\psi(t, h(x)) = h \circ \phi(t, x)$. Si h est un difféomorphisme (resp. si h est linéaire), on dit que X et Y sont différentiablement conjugués (resp. linéairement conjugués).

On vérifie facilement que ces trois conjugaisons, topologique, différentiable et linéaire, constituent des relations d'équivalence sur les champs de vecteurs de V , que deux champs linéairement conjugus sont différentiablement conjugus, et enfin que deux champs différentiablement conjugus sont topologiquement conjugus. La classification linéaire des champs linéaires (systèmes à coefficients constants) se ramène à celle de la classification des matrices :

10.1.3. Proposition

Deux champs linéaires $\dot{x} = Ax$ et $\dot{y} = By$ sur \mathbb{R}^n , sont linéairement conjugués si et seulement si les matrices A et B sont conjuguées.

Preuve : Soient $\phi(t,x) = \exp tA \cdot x$ et $\psi(t,y) = \exp tB \cdot y$, les systèmes dynamiques (globaux) associés à (1) : $\dot{x} = Ax$, et (2) : $\dot{y} = By$ respectivement. Si les matrices A et B sont conjuguées, il existe une matrice inversible S telle que $SA = BS$. On a $S^{-1}\psi(t,Sx) = S^{-1} \cdot \exp tB \cdot Sx = \exp tS^{-1}BS \cdot x = \exp tA \cdot x = \phi(t,x)$, ce qui montre que l'application linéaire h de matrice S réalise une conjugaison entre (1) et (2). Réciproquement, si (1) et (2) sont linéairement conjugués, soit S la matrice de la conjugaison. On a $\exp tB \cdot Sx = S \exp tA \cdot x$, d'où en dérivant par rapport à t , $B \cdot \exp tB \cdot Sx = SA \exp tA \cdot x$, qui donne, pour $t = 0$, $BSx = SAx$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, d'où $BS = SA$. CQFD.

10.1.4. Proposition

Deux champs linéaires $\dot{x} = Ax$ et $\dot{y} = By$ sur \mathbb{R}^n sont différentiablement conjugués si et seulement si ils sont linéairement conjugués.

Preuve : Soit h un difféomorphisme de \mathbb{R}^n établissant la conjugaison entre (1) : $\dot{x} = Ax$ et (2) : $\dot{y} = By$. Comme $x \equiv 0$ est une solution, constante de (1), $y \equiv h(0)$ est une solution constante de (2) d'où $B \cdot h(0) = 0$. Soit τ la translation $y \mapsto \tau(y) = y - h(0)$ de \mathbb{R}^n , et $k = \tau \circ h$. Remarquons que k envoie une solution de (1) sur une solution de (2) : si x est une solution de (1), on a en effet :

$$\frac{d k \circ x}{dt} = \frac{d h \circ x}{dt} - \frac{d h(0)}{dt} = B \cdot h \circ x - 0 = B \cdot h \circ x - B \cdot h(0) = B \cdot k \circ x$$

10.1.5.

On en déduit que pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}^n$,
 $k(\exp tA \cdot x) = \exp tB \cdot k(x)$. Posons $K = Dk(o)$ et différencions cette
 dernière identité par rapport à x , en $x = o$. On obtient
 $K \cdot \exp tA = \exp tB \cdot K$, ce qui montre que K établit une conjugaison
 linéaire entre (1) et (2). CQFD.

10.1.5. On dira qu'un champ de vecteur linéaire est *générique* si toutes
 les valeurs propres de la matrice qui le définit sont distinctes et de parties
 réelles non nulles.

Remarquons que si $\dot{x} = Ax$ est générique, il en est encore ain-
 si de tout champ linéaire $\dot{y} = By$ pour lequel les coefficients de B sont
 suffisamment voisins de ceux de A , et que si $\dot{x} = Ax$ n'est pas générique,
 il existe, arbitrairement près de A , une matrice B telle que $\dot{y} = By$
 soit générique.

10.1.6. Théorème

Deux champs linéaires génériques $\dot{x} = Ax$ et $\dot{y} = By$ sont topologiquement
 conjugués si et seulement si ils ont le même nombre de valeurs propres de partie
 réelle positive.

La preuve de ce théorème, qui interviendra en fin de ce paragraphe (10.1.), s'appuie sur les deux lemmes suivants.

10.1.7. Lemme 1 : Si x_λ est un vecteur propre associé à la valeur propre
 λ de A , alors $t \mapsto e^{\lambda t} \cdot x_\lambda$ est solution de $\dot{x} = Ax$.

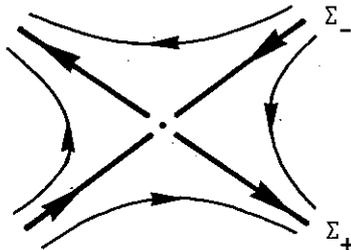
Preuve : $\frac{d}{dt} (e^{\lambda t} x_\lambda) = e^{\lambda t} \cdot \lambda x_\lambda = e^{\lambda t} Ax_\lambda = A e^{\lambda t} x_\lambda$ CQFD.

Lemme 2 : Si A est la matrice définissant un champ de vecteur linéaire générique, \mathbb{R}^n se décompose en somme directe de sous espaces de dimension un et deux invariants par A , engendrés respectivement par les vecteurs propres réels, et les parties réelles et imaginaires des vecteurs propres associés aux valeurs propres complexes.

Preuve : Du fait que A est réelle résulte que, si μ est une valeur propre non réelle de A , de vecteur propre ξ , il en est de même de $\bar{\mu}$ et $\bar{\xi}$. Les valeurs propres de A , distinctes par hypothèse, se décomposent donc en p valeurs propres réelles $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, et $2q$ valeurs propres $\mu_1, \bar{\mu}_1, \dots, \mu_q, \bar{\mu}_q$ non réelles, avec $n = p + 2q$. Soit $x_1, \dots, x_p, \xi_1, \bar{\xi}_1, \dots, \xi_q, \bar{\xi}_q$ une base de \mathbb{C}^n de vecteurs propres correspondants où les x_i sont réels. Soient $\sigma_j = (\xi_j + \bar{\xi}_j)/2$ et $\delta_j = (\xi_j - \bar{\xi}_j)/2i$. On voit immédiatement que $B = \{x_1, \dots, x_p, \sigma_1, \delta_1, \dots, \sigma_q, \delta_q\}$ est également génératrice de \mathbb{C}^n , et comme $p + 2q = n$, B est donc une base de \mathbb{C}^n . Or $\sigma_j = \operatorname{Re} \xi_j$ et $\delta_j = \operatorname{Im} \xi_j$; B est donc composé de vecteurs réels, qui sont indépendants sur \mathbb{C} , donc a fortiori indépendants sur \mathbb{R} : B est donc une base de \mathbb{R}^n . Soit $\alpha_j = \operatorname{Re} \mu_j$ et $\omega_j = \operatorname{Im} \mu_j$. On voit facilement que $A\sigma_j = \alpha_j \sigma_j - \omega_j \delta_j$ et que $A\delta_j = \alpha_j \delta_j + \omega_j \sigma_j$: le sous espace de \mathbb{R}^n engendré par σ_j et δ_j est donc invariant par A . CQFD.

Preuve du théorème : Soit Σ_+ le sous espace de \mathbb{R}^n engendré par les x_i, σ_j, δ_j correspondant à des valeurs propres de A de partie réelle positive, et définissons de manière analogue Σ_- . On a $\mathbb{R}^n = \Sigma_+ \oplus \Sigma_-$, et la dimension de Σ_+ est précisément égale au nombre de valeurs propres de A de partie réelle positive, c'est-à-dire l'invariant envisagé par le théorème. En appliquant le lemme 1 et le fait que les parties réelles et imaginaires d'une solution complexe sont des solutions réelles, on voit d'une part que Σ_+ et Σ_- sont invariants pour le système dynamique associé à (1): $\dot{x} = Ax$. On note d'autre part que toute solution dans Σ_+ tend

vers l'infini lorsque t tend vers $+\infty$ et vers 0 lorsque t tend vers $-\infty$, et que dans Σ_- la situation est inversée. Comme $\mathbb{R}^n = \Sigma_+ \oplus \Sigma_-$, par linéarité de (1), toute solution de (1) se décompose de manière unique en somme de deux solutions contenues respectivement dans Σ_+ et Σ_- . On en déduit que toute solution issue d'un point n'appartenant ni à Σ_+ ni à Σ_- tend vers l'infini aussi lorsque t tend vers $+\infty$ que lorsqu'il tend vers $-\infty$. Supposons à présent que (1) : $\dot{x} = Ax$ et (2) : $\dot{y} = By$ soient topologiquement conjugués par h , et notons $\Sigma_+(A)$, $\Sigma_-(A)$, $\Sigma_+(B)$, $\Sigma_-(B)$ les sous espaces correspondants. Comme 0 est l'unique point stationnaire de (1) et de (2), nécessairement $h(0) = 0$. A présent, du fait qu'une solution de (1) tend vers 0 ou l'infini lorsque t tend vers $\pm\infty$ si et seulement si la solution de (2) image par h admet le même comportement, on voit que $h(\Sigma_+(A)) = \Sigma_+(B)$ et donc $\dim \Sigma_+(A) = \dim \Sigma_+(B)$ ⁽¹⁾. CQFD.



En vertu du lemme 2, il suffit d'établir la réciproque dans les seuls cas où $n = 1$, ou $n = 2$ et où les matrices A et B ont deux valeurs propres complexes conjuguées. En fait, nous allons montrer

⁽¹⁾ Ceci constitue le théorème de l'invariance du domaine, qui assure que si un ouvert U de \mathbb{R}^p est homéomorphe à un ouvert V de \mathbb{R}^q , alors nécessairement $p=q$; voir par exemple GODBILLON (C.) : "Éléments de topologie algébrique", ou ALEXANDROV (P.) : "Introduction à la théorie homologique de la dimension".

la réciproque pour le cas où A est le "modèle" de la situation envisagée, c'est-à-dire, pour $A = \pm 1$ si $n = 1$ et

$$A = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

si $n = 2$: le cas général découle alors du fait que la conjugaison est une relation d'équivalence. Quitte à poser $\tau = -t$, on peut supposer que les valeurs propres sont de partie réelle positive.

Cas $n = 1$: On veut montrer que $\dot{y} = by$, avec $b > 0$, est conjuguée à $\dot{x} = x$. Il suffit dans ce cas de poser $y = h(x) = x^{[b]}$, où

$$x^{[b]} = \begin{cases} x^b & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -|x|^b & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

On vérifie facilement que h est un homéomorphisme de \mathbb{R} , différentiable en dehors de 0, et que $h'(x) = |x|^{b-1}$. De plus, si $\dot{y} = by$, on a, pour $x \neq 0$, $b|x|^{b-1} \dot{x} = \dot{y} = by = bx^{[b]}$ d'où $\dot{x} = x^{[b]}/|x|^{b-1} = x$.
CQFD.

Cas $n = 2$: Quitte à pratiquer une première conjugaison linéaire, on peut supposer que B est de la forme

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix}$$

avec $\alpha = \operatorname{Re} \mu \geq 0$, ou encore, en posant $y = [R, \theta]$ (coordonnées polaires)

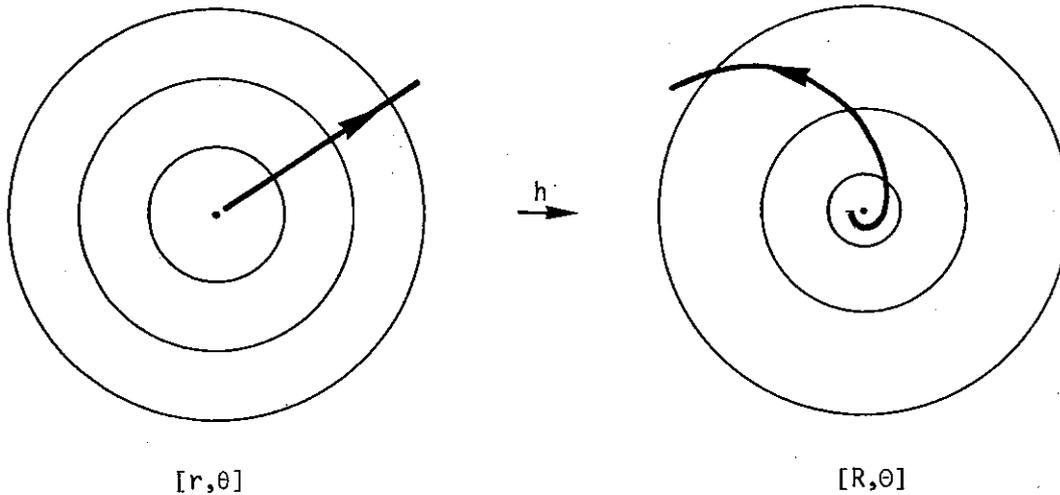
$$\begin{cases} \dot{R} = \alpha R \\ \dot{\theta} = \omega \end{cases}$$

A présent, en notant $x = [r, \theta]$, il suffit de définir $y = h(x)$ par

$$\begin{aligned} R &= h_1([r, \theta]) = r^\alpha \\ \theta &= h_2([r, \theta]) = \beta + \omega \log r \end{aligned}$$

10.2.1.

pour $r > 0$ (i.e. $x \neq 0$), et $h(0) = 0$. On vérifie facilement que h ainsi défini est un homéomorphisme, différentiable en dehors de 0 . De plus, si $\dot{y} = By$, on a, pour $r \neq 0$,
 $\alpha|r|^{\alpha-1} \dot{r} = \dot{R} = \alpha R = \alpha r^{[\alpha]}$, d'où $\dot{r} = r$, et par ailleurs
 $\dot{\beta} + \omega = \dot{\beta} + \omega r/r = \dot{\theta} = \omega$, d'où $\dot{\beta} = 0$. On en déduit, en revenant aux coordonnées cartésiennes pour x , que $\dot{x} = x$. CQFD.



10.2. NOEUDS, COLS, FOYERS ET CENTRES

10.2.1. Henri POINCARÉ a introduit une classification des champs de vecteurs linéaires du plan, plus fine que la classification topologique, et qui regroupe en un nombre fini de classes les champs selon l'aspect :

10.2.1.

géométrique de la famille des courbes intégrales ; cette classification est moins fine que la classification différentiable ou linéaire (qui comporte, comme nous l'avons vu, une infinité de classes). C'est une classification géométrique, en ce sens qu'elle ne s'attache qu'aux aspects retenus lors de l'étude des courbes paramétriques (point limite, tangente, direction asymptotique) au détriment d'aspect tel que le type de croissance.

10.2.2. Cette classification s'applique aux systèmes $\dot{x} = Ax$ où A est non dégénérée, c'est-à-dire que 0 n'est pas valeur propre. Deux situations sont à envisager : d'une part, celle où les valeurs propres de A sont réelles (on les notera λ et μ), d'autre part celle où les valeurs propres sont complexes conjuguées (on les notera $\alpha \pm i\omega$, avec α et ω réels). Dans chacun de ces cas, \mathbb{R}^2 admet une base dans laquelle l'application linéaire associée à A a pour matrice

ou bien $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, ou bien $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, ou bien $\begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix}$

En notant X et Y les coordonnées dans cette base, il est aisé de résoudre le système en X et Y :

dans le premier cas on a $(X,Y) = (e^{\lambda t} X_0, e^{\mu t} Y_0)$.

dans le deuxième cas on a $(X,Y) = e^{\lambda t} (X_0 + t Y_0, Y_0)$.

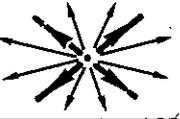
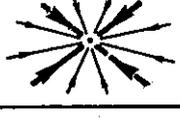
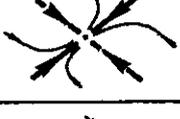
dans le troisième cas on a $(X,Y) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix}$

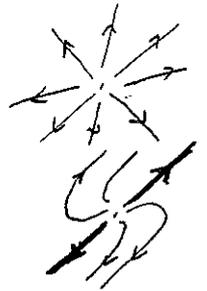
le tableau de classification

Il est dès lors facile d'étudier le comportement des solutions. On trouvera ci-dessous selon les valeurs respectives de λ , μ , et α le comportement des solutions ainsi que le nom donné par POINCARÉ à ces divers cas. On a tracé en gros la direction correspondant aux vecteurs propres associés à λ et un pointillé celle des vecteurs propres associés à μ .

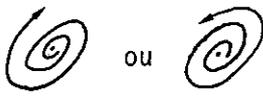
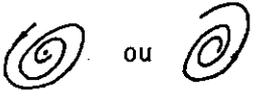
Tableau 1: Trajectoires de $y' = Ay$, selon les valeurs propres λ et μ , ou $\alpha \pm i\omega$ et A , ainsi que le nom donné au point de vue de Poincaré par H. Poincaré.

10.2.3. Valeurs propres réelles

$0 < \lambda < \mu$		Noeud instable
$0 < \lambda = \mu$ A diagonalisable		Noeud dégénéré instable
$0 < \lambda = \mu$ A non diagonalisable		Noeud instable
$\lambda < 0 < \mu$		Col
$\lambda = \mu < 0$ A diagonalisable		Noeud dégénéré stable
$\lambda = \mu < 0$ A non diagonalisable		Noeud stable
$\mu < \lambda < 0$		Noeud stable



Valeurs propres complexes conjuguées ($\alpha \pm i\omega$, $\omega \neq 0$).

$\alpha > 0$		Foyer instable
$\alpha = 0$		Centre
$\alpha < 0$		Foyer stable

10.2.4. *Remarque* : On notera que POINCARÉ affecte l'épitéte stable aux situations correspondant aux cas où le point stationnaire est positivement asymptotiquement stable (au sens de LYAPUNOV) et l'épitéte instable dans le cas où le point stationnaire est négativement asymptotiquement stable.

10.3. CAS DES CHAMPS DE VECTEURS DIFFÉRENTIABLES

10.3.1. Soit x_0 un point stationnaire d'un champ de vecteur $\mathcal{C}^\infty X$ sur \mathbb{R}^n . Soit $A = \text{Jac } X(x_0)$ la matrice (jacobienne) de la différentielle de X au point x_0 . On appelle *linéarisé de X au point stationnaire x_0* le champ linéaire

$$\dot{x} = A x$$

Comme $X(x_0) = 0$, le champ X et son linéarisé sont égaux en première approximation au voisinage de x_0 . Ceci rend plausible le théorème suivant, que nous admettrons :

10.3.2. Théorème ⁽¹⁾

Si le linéarisé de X au point stationnaire x_0 est générique, il existe des voisinages U de x_0 et U' de 0 dans \mathbb{R}^n tels que les restrictions de X et de son linéarisé à U et U' respectivement sont différenciablement conjugués.

⁽¹⁾ voir par exemple : GODBILLON (C.) "Systèmes dynamiques sur les surfaces".

10.E.1.

10.E. EXERCICES

10.E.1. En calculant le linéarisé au voisinage de chaque point stationnaire, déterminer la nature des points stationnaires des champs suivants :

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y \\ \dot{y} = \log(1-x+x^3) - \log 3 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = \log(2-y^2) \\ \dot{y} = e^x - e^y \end{cases}$$

10.E.2. On considère le champ de vecteurs suivant sur \mathbb{R}^2

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - 8 \\ \dot{y} = x^2 - 4y^2 \end{cases}$$

- i) Etudier la nature des points stationnaires.
- ii) Que peut-on dire de la droite d'équation $x=2$?
- iii) Tracer avec un maximum de soin un schéma du portrait de phase de ce champ.

10.E.3. On considère l'équation différentielle suivante ⁽¹⁾ :

$$(1) \quad \ddot{x} + \dot{x}^2 + x = 0$$

Soit X le champ associé à (1) dans le plan de phase :

$$X \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - y^2 \end{cases}$$

⁽¹⁾ voir F. DIENER : "Les canards de l'équation $\ddot{x} + (\dot{x}-a)^2 + x = 0$ ", I.R.M.A., Strasbourg (1980).

- i) Déterminer le linéarisé Y de X au voisinage du point stationnaire $(0,0)$. A quel type de classification de Poincaré des champs linéaires du plan appartient le champ Y ?
- ii) Trouver une solution polynômiale non nulle $x_0(t)$ de (1) :
$$x_0(t) = a_n t^n + \dots + a_0 .$$
- iii) En dehors de l'axe $y=0$ les trajectoires de X sont des graphes de fonctions $y=y(x)$: calculer dy/dx . En remarquant que $2y dy/dx = d(y^2)/dx$, montrer que $y^2(x)$ est solution d'une équation différentielle linéaire, qu'on résoudra.
- iv) Dédurre de la question précédente une intégrale première de X , c'est-à-dire une fonction $L(x,y)$ qui est constante sur les trajectoires. En déduire la nature de la stabilité au sens de Liapunov de la solution stationnaire de X (positive, négative, asymptotique).
- v) Déterminer la trajectoire de X associée à la solution x_0 de (1) trouvée au (ii). Faire un schéma des trajectoires de X .
- vi) Soit (E_a) l'équation $\ddot{x} + (\dot{x}-a)^2 + x = 0$ et X_a le champ associé dans le plan de phase. Déterminer le point stationnaire de X_a et son linéarisé Y_a au voisinage de ce point.
- vii) Pour a dans \mathbb{R} , déterminer la nature locale du point stationnaire de X_a . Faire un schéma dans chaque cas.

11. L'ÉQUATION AUX VARIATIONS

11.0. Au chapitre précédent nous avons vu ce que peut nous apprendre, au voisinage d'un point stationnaire x_0 d'un champ de vecteurs, l'approximation linéaire de ce champ. Dans le cas d'une solution quelconque d'une équation (non autonome) $\dot{x} = f(t, x)$, il est également possible de "linéariser l'étude". Ici, c'est l'équation aux variations associée à la solution particulière, qui est linéaire, qui nous permettra d'obtenir des informations sur la différentielle de la solution générale de l'équation. Elle nous permettra d'établir le théorème de différentiabilité énoncé au 6.4.

11.1. Considérons l'équation différentielle

$$(1) \quad \dot{x} = f(t, x)$$

où f est une fonction de classe \mathcal{C}^∞ , définie sur un ouvert U de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. L'équation (1) satisfait donc au théorème d'existence et d'unicité des solutions. Pour tout (t_0, x_0) dans l'ouvert de définition de f il existe donc une solution générale locale ϕ de (1), continue, telle que $\phi(t_0, x) = x$. Du fait que ϕ est une "solution générale" (locale), elle est \mathcal{C}^∞ en t , puisque $d\phi/dt = f(t, \phi)$ (raisonner par récurrence). Dans ce chapitre, nous nous intéresserons à la différentiabilité de ϕ par rapport à x : nous noterons ϕ'_x la différentielle (partielle) de ϕ par rapport à x , et $\text{Jac } \phi$ la matrice de ϕ'_x ; donc $\phi'_x(t, x)[v] = \text{Jac } \phi(t, x) \cdot v = (\phi'_{x_1}, \dots, \phi'_{x_n}) \cdot v$; nous adoptons des notations semblables pour f : $f'_x(t, x)$.

11.2. Remarque fondamentale

Si ϕ est de classe \mathcal{C}^2 , alors $t \mapsto \text{Jac } \phi(t, x_0)$ est la matrice résolvante $Z(t, t_0)$ de l'équation linéaire

$$(2) \quad \dot{X} = \text{Jac } f(t, \phi(t, x_0)) \cdot X$$

Cette équation s'appelle l'équation aux variations de la solution $t \mapsto \phi(t, x_0)$ de (1).

Preuve : $\frac{\partial}{\partial t} \phi'_{x_i}(t,x) = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{d}{dt} \phi(t,x) = \frac{\partial}{\partial x_i} f(t,\phi(t,x)) = \text{Jac } f(t,\phi(t,x)) \cdot \phi'_{x_i}(t,x)$

Les colonnes de $\text{Jac } \phi(t,x_0)$ sont donc solutions de (2). Comme $\phi(t_0,x) = x$, $\phi'_x(t_0,x_0) = \text{Id} = Z(t_0,t_0)$. CQFD.

Nous nous guiderons sur cette remarque pour montrer l'existence de ϕ'_x : de même qu'il existe une solution ϕ à $\dot{x} = f(t,x)$, il existe une solution (ϕ, ϕ'_x) à l'équation $(\dot{x}, \dot{v}) = (f(t,x), f'_x(t,x)[v])$. Tel sera le principe de la preuve du théorème 11.4.

11.3. Lemme et définition

Si f est de classe \mathcal{E}^2 , toute solution générale locale ϕ de (1) est de classe \mathcal{E}^1 , et (ϕ, ϕ'_x) est solution générale locale de l'équation (3) $(\dot{x}, \dot{v}) = (f(t,x), f'_x(t,x)[v])$, appelée *champ aux variations* associé à (1).

Preuve : Considérons l'équation différentielle (3) : $\dot{y} = F(t,y)$, définie sur $U_{t,x} \times \mathbb{R}^n_v$, où $y = (x,v)$ et $F(t,y) = (f(t,x), f'_x(t,x)[v])$. Comme f est de classe \mathcal{E}^2 , f'_x est de classe \mathcal{E}^1 , et donc F satisfait au théorème d'existence et d'unicité des solutions : pour tout $(t_0, x_0, v_0) \in U \times \mathbb{R}^n$, l'équation admet une solution générale locale $\Phi(t,x,v)$ définie au voisinage de (t_0, x_0, v_0) , limite uniforme de la suite Φ_n définie par récurrence par $\Phi_0(t,y) = y$ et $\Phi_n(t,y) = y + \int_{t_0}^t F(s, \Phi_{n-1}(s,y)) ds$ (voir 6.2.1. et 6.3.2.).

Posons $\phi_n(t,x,v) = (\phi_n(t,x,v), \psi_n(t,x,v))$; en explicitant F et ϕ_n , on voit que

$$\phi_n(t,x,v) = \phi_n(t,x) = x + \int_{t_0}^t f(s, \phi_{n-1}(s,x)) ds \tag{*}$$

$$\text{et } \psi_n(t,x,v) = v + \int_{t_0}^t f'_x(s, \phi_{n-1}(s,x))[\psi_{n-1}(t,x,v)] ds \tag{***}$$

On a $\phi_0(t,x) = x$, d'où $(\phi_0)'_x(t,x)[v] = v = \psi_0(t,x,v)$; plus

généralement, en raisonnant par récurrence,

$$(\phi_n)'_{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x})[\mathbf{v}] = \psi_n(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) ,$$

$$\begin{aligned} \text{puisque } (\phi_n)'_{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x})[\mathbf{v}] &= \left(\mathbf{x} + \int_{t_0}^t f(s, \phi_{n-1}(s, \mathbf{x})) ds \right)'_{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x})[\mathbf{v}] = \\ &= \text{Id}[\mathbf{v}] + \int_{t_0}^t f'_{\mathbf{x}}(s, \phi_{n-1}(s, \mathbf{x})) \left[(\phi_{n-1})'_{\mathbf{x}}(s, \mathbf{x})[\mathbf{v}] \right] ds \\ &= \mathbf{v} + \int_{t_0}^t f'_{\mathbf{x}}(s, \phi_{n-1}(s, \mathbf{x})) [\psi_{n-1}(s, \mathbf{x}, \mathbf{v})] ds = \psi_n(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) . \end{aligned}$$

A présent, par définition de F , la première composante ϕ de la solution générale $\Phi = (\phi, \psi)$ est limite uniforme des fonctions ϕ_n , qui sont \mathcal{E}^1 en \mathbf{x} , et dont les différentielles $(\phi_n)'_{\mathbf{x}} = \psi_n$ convergent uniformément vers la seconde composante, ψ , de Φ . On en déduit que ϕ'_x existe et est égale à ψ , qui est continue (2.4.1.) : en d'autres termes ϕ est \mathcal{E}^1 en \mathbf{x} et $\Phi = (\phi, \phi'_x)$ est solution de (3). Comme ϕ est \mathcal{E}^1 en t , ϕ est bien continûment différentiable. CQFD.

11.4. Théorème (différentiabilité)

Si f est \mathcal{E}^∞ en \mathbf{x} , toute solution générale locale est \mathcal{E}^∞ en \mathbf{x} .

Preuve : Nous allons montrer, par récurrence sur k , que pour toute équation différentielle $\dot{y} = F(t, y)$, si F est de classe \mathcal{E}^{k+1} , alors toute solution générale locale ϕ est de classe \mathcal{E}^k . Le lemme montre que l'énoncé est vrai pour $k = 1$; supposons qu'il soit vrai pour tout F de classe \mathcal{E}^k . Soit $\dot{x} = f(t, x)$ une équation différentielle quelconque, avec f de classe \mathcal{E}^{k+1} ($k \geq 1$) et soit ϕ une solution générale locale de cette équation. Alors, d'après le lemme, ϕ'_x existe et (ϕ, ϕ'_x) est solution du champ aux variations $(\dot{x}, \dot{v}) = (f(t, x), f'_{\mathbf{x}}((t, x)[\mathbf{v}]) = F(t, x, \mathbf{v})$, où F est de classe \mathcal{E}^k . Par hypothèse de récurrence (ϕ, ϕ'_x) est de classe \mathcal{E}^{k-1} en \mathbf{x} , en particulier ϕ'_x , ce qui montre que ϕ est \mathcal{E}^k en \mathbf{x} . CQFD.

11.5. Remarque : Pour établir ce théorème, nous avons en fait montré que si f est de classe \mathcal{C}^{k+1} en x , alors ϕ est de classe \mathcal{C}^k en x . Par un raisonnement d'analyse plus fin, il est en fait possible de montrer que si f est de classe \mathcal{C}^k en x , il en est de même de ϕ .

Equations à paramètres

11.6. On est souvent amené à considérer des équations différentielles, du type $\dot{x} = f(t, x, m)$, où m est un paramètre. Dans ce cas toute solution générale locale dépendra de la valeur du paramètre et est donc également une fonction de m : $\phi = \phi(t, x, m)$. Si m appartient à \mathbb{R}^p (ou un ouvert de \mathbb{R}^p), on peut s'interroger sur la régularité de ϕ par rapport à ce paramètre. On a le résultat suivant.

11.7. Corollaire (différentiabilité par rapport aux paramètres)

Si f est \mathcal{C}^∞ en (x, m) , toute solution générale locale $\phi = \phi(t, x, m)$ est \mathcal{C}^∞ en (x, m) .

Preuve : $t \mapsto (\phi(t, x, m), m)$ est solution générale locale de l'équation $\mathcal{C}^\infty (\dot{x}, \dot{m}) = (f(t, x, m), 0)$. CQFD.

11.E. EXERCICE

Montrer que si f est \mathcal{C}^∞ (en (t, x)), alors toute solution générale locale est \mathcal{C}^∞ (en (t, x)).

12. SYSTÈMES LINÉAIRES PÉRIODIQUES (THÉORIE DE FLOQUET ET LYAPUNOV)

La théorie des équations différentielles linéaires périodiques connue sous le nom de Théorie de FLOQUET-LYAPUNOV a été développée, à l'origine ⁽¹⁾ ⁽²⁾ pour des équations linéaires à variable complexe. Nous l'envisageons ici pour une variable réelle (t) . Ceci nous permettra de nous familiariser avec un objet géométrique particulièrement important dans l'étude des solutions périodiques : l'application de premier retour de POINCARÉ. Dans le contexte linéaire, elle porte encore le nom d'application de monodromie et est simple à définir analytiquement.

12.1. MATRICE DE MONODROMIE

Considérons une équation différentielle linéaire

$$(1) \quad \dot{x} = A(t) x$$

où l'on suppose que l'application continue A définie sur \mathbb{R} , à valeur matricielle, est une fonction périodique de période $T > 0$. Comme à l'acoutumée, on désigne par (I) l'équation matricielle $\dot{X} = A.X$ associée à (1).

12.1.1. Remarque fondamentale

Pour toute solution $t \mapsto x(t)$ d'une équation différentielle
(2) $\dot{x} = f(t,x)$ où f est une fonction périodique, de période T , la fonction $t \mapsto x(t+T)$ est également une solution de (2).

⁽¹⁾ FLOQUET (G.), Ann.Ec.Norm. (2) 13 (1883), p.47.

⁽²⁾ LYAPUNOV (A.), Ann.Fac.Sc.Toul. (2), 9 (1907), pp.203-469.

Cette remarque, qui fait pendant à la "remarque fondamentale" pour les équations différentielles autonomes (ou champ de vecteurs), se démontre comme elle, en remarquant que la dérivée de la fonction $t \mapsto t + T$ est égale à 1. Elle a pour conséquence, si f satisfait aux hypothèses du théorème d'unicité des solutions, que pour qu'une solution $t \mapsto x(t)$ soit périodique, il suffit qu'il existe un instant t_0 tel que $x(t_0 + T) = x(t_0)$: on remarque que $\bar{x}(t) = x(t+T)$ est une solution de (1) égale à x pour $t = t_0$.

12.1.2. Revenons à l'équation linéaire (1). Pour toute matrice fondamentale $X(t)$ de solutions de (1), définie sur tout \mathbb{R} (voir 9.1.2.), on pose $M_X(t) = X^{-1}(t) \cdot X(t+T)$, qui satisfait donc à la relation

$$X(t+T) = X(t) M_X(t)$$

et est inversible pour tout t .

12.1.3. Proposition - Définition

La matrice $M_X(t)$ est indépendante du temps. Si Y est une autre matrice fondamentale de (1), alors M_Y est conjuguée à M_X . Pour $X = Z(t, t_0)$, la matrice M_X s'appelle la *matrice de monodromie* de (1).

La preuve de cette proposition se fonde sur le lemme trivial suivant :

12.1.4. Lemme : Pour toute matrice fondamentale X de solutions de (1) et toute matrice (constante) C , la fonction $X \cdot C$ est une solution de (1).

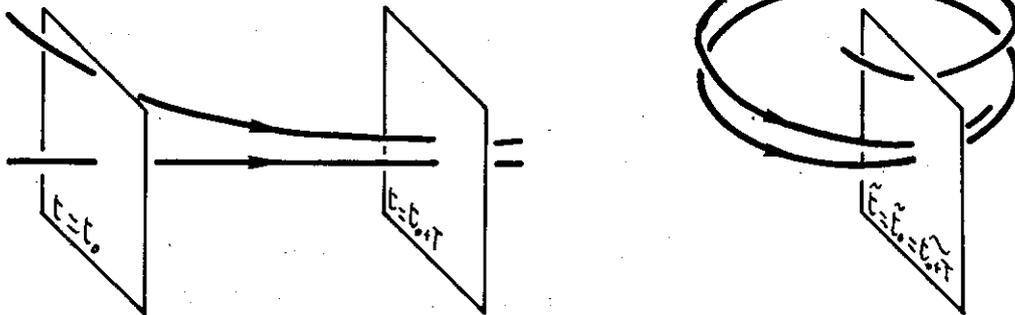
12.1.5.

Preuve de la proposition : Soit t_0 un instant fixé et X une matrice fondamentale quelconque de (1). La fonction $t \mapsto X(t) M_X(t_0)$ est une solution de (I) en vertu du lemme. D'après la remarque fondamentale, la fonction $t \mapsto X(t+T)$ est également une solution de (I) et elle est égale à la précédente pour $t = t_0$, par définition de $M_X(t)$. Par unicité des solutions de (I), on en déduit que pour tout t ,
 $X(t) M_X(t_0) = X(t+T) = X(t) M_X(t)$. Comme $X(t)$ est inversible, on a
 $M_X(t) = M_X(t_0)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Soit Y une seconde matrice fondamentale de (1). Posons
 $S(t) = Y^{-1}(t) X(t)$, d'où $X(t) = Y(t) S(t)$. En raisonnant comme précédemment, on montre que S est indépendante du temps. A présent, par définition de S , M_X et M_Y , on a pour tout t ,
 $Y(t) M_Y S = Y(t+T) S = X(t+T) = X(t) M_X = Y(t) S M_X$
 Comme $Y(t)$ est inversible, on a $M_Y S = S M_X$, où S est inversible, puisque $S = Y^{-1} X$. CQFD.

12.1.5. Interprétation géométrique

Soit $Z(t, t_0)$ une matrice résolvante de (1); définissons
 $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ par $\pi(x) = Z(t_0+T, t_0)x$. C'est l'application qui à tout point x_0 de \mathbb{R}^n associe la valeur, à l'instant $t = t_0 + T$, de la solution issue de x_0 pour $t=t_0$. Cette application, qui consiste à longer les solutions durant un temps T , s'appelle l'application de POINCARÉ associée à (1). Observons que l'équation (1), induit un champ de vecteur sur $S^1 \times \mathbb{R}^n = (\mathbb{R}/T.\mathbb{Z}) \times \mathbb{R}^n$ puisque
 $f(t+T, x) = A(t+T, x) = A(t)x = f(t, x)$. (l'application d'enroulement $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^n \rightarrow S^1_t \times \mathbb{R}^n$ constituant, localement, les cartes locales de $S^1 \times \mathbb{R}^n$). Dans ce cas, les "plans" $\mathcal{U} = \mathcal{U}_0$ et $\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 + 2\pi$ sont confondus, ce qui conduit à encore appeler π l'application de premier retour. Notons M pour $M_Z(t_0+T, t_0)$.



Par définition de la matrice de monodromie, on a :

$$\pi(x) = Z(t_0 + T, t_0) x = Z(t_0, t_0) M x = M x$$

d'où il ressort que l'application de POINCARÉ est, dans ce cas, linéaire, et que sa matrice n'est autre que la matrice de monodromie associée à la matrice résolvante $Z(t, t_0)$.

12.1.7.

12.1.7. Théorème (LYAPUNOV)

Il existe un changement d'inconnue $(t,x) = (t,S(t)y)$, T-périodique par rapport à t , linéaire par rapport à y , tel que l'équation différentielle associée à (1) par ce changement d'inconnue soit l'équation linéaire à coefficients constants $\dot{y} = B y$, où $\exp(TB) = Z(T,0)$.

Preuve : Soit $M = Z(T,0)$ la matrice de monodromie associée à la résolvante $Z(t) = Z(t,0)$. On a $\det M = \det Z(T,0) = e^{\int_0^T \text{Trace } A(\tau) d\tau}$ qui est donc strictement positif. Il existe donc une matrice B telle que $M = \exp(TB)$. Il suffit alors de poser $S(t) = Z(t) \exp(-tB)$.

En effet, on a

$$\begin{aligned} \dot{x} &= d(S(t)y) / dt = \dot{S}(t)y + S(t)\dot{y} \\ &= (A(t)Z(t) \exp(-tB) - Z(t)B \exp(-tB)) y + Z(t) \exp(-tB) \dot{y} \end{aligned}$$

et $\dot{x} = A(t) Z(t) \exp(-tB) y$ d'après (1), d'où

$$\dot{y} = \exp(tB) Z^{-1}(t) Z(t) B \exp(-tB) y = \exp(tB) B \exp(-tB) y = B \exp(tB) \exp(-tB) y = B y$$

CQFD.

Remarque : Le théorème de LYAPUNOV montre en particulier que le problème de la classification des systèmes linéaires à coefficients périodiques se ramène à celle des systèmes linéaires autonomes étudiés au chapitre 10.

12.2. VALEURS CARACTERISTIQUES

12.2.1. Nous avons montré (12.1.3.) que les matrices de monodromies associées à deux matrices fondamentales de solutions de (1) sont nécessairement conjuguées. On en déduit que l'ensemble des valeurs propres de la matrice de monodromie M_X est indépendant du choix de la matrice fondamentale X . Ces valeurs propres s'appellent les *valeurs caractéristiques* de l'équation (1).

12.2.2. Proposition

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs caractéristiques de (1) et $P = \lambda_1 \dots \lambda_n$ leur produit. Alors $P = e^{\int_0^T \text{Trace } A(\tau) d\tau}$.

Preuve : Choisissons $Z(t,0)$ comme matrice fondamentale de solutions de (1) et soit $M = Z(T,0)$ la matrice de monodromie correspondante. Alors $P = \det M = \det Z(T,0)$. La proposition découle donc de la formule de LIOUVILLE. CQFD.

12.2.3. Théorème (FLOQUET)

Pour toute valeur caractéristique λ de (1) il existe une solution (éventuellement complexe) de (1) telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x(t+T) = \lambda x(t)$; on dit que x est une solution *pseudo périodique* de (1). Si λ est réel, alors x peut être choisie réelle.

Preuve : Soit $Z(t) = Z(t,0)$, et $M = Z(T)$ la matrice de monodromie correspondante. Soit λ une valeur caractéristique de (1) : c'est une valeur propre de M ; il existe donc $x_0 \in \mathbb{C}^n$ tel que $Mx_0 = \lambda x_0$. Si λ est réel, on peut choisir x_0 réel. Il suffit alors de poser $x(t) = Z(t)x_0$. En effet, comme $Y(t) = Z(t+T, T)$ est une solution (matricielle) de (I) d'après la remarque fondamentale, et que $Y(0) = \text{Id} = Z(0)$ on a donc, par unicité des solutions de (I) que $Z(t+T, T) = Z(t, 0)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Dès lors $x(t+T) = Z(t+T, 0) x_0 = Z(t+T, T) \cdot Z(T, 0) x_0 = Z(t, 0) \cdot \lambda x_0 = \lambda x(t)$. CQFD.

12.2.4. Corollaire

L'équation (1) admet une solution périodique non nulle si et seulement si 1 est une valeur caractéristique de cette équation.

Preuve : La condition est nécessaire, puisque, si x est une solution T -périodique non nulle, $M_Z x(0) = Z(T,0) x(0) = x(T) = x(0) \neq 0$ puisque x n'est pas la solution nulle (9.2.3.), ce qui montre que 1 est une valeur propre de M_Z . La condition est suffisante d'après le théorème de FLOQUET.

12.3. SOLUTIONS PERIODIQUES DES EQUATIONS AVEC SECOND MEMBRE

12.3.1. Equation adjointe de l'équation (1) : On appelle équation différentielle linéaire adjointe de l'équation (1) $\dot{x} = A(t)x$ l'équation

$$(1^*) \quad \dot{x} = - {}^t A(t) x$$

On montre facilement (voir exercice 9.E.4.) que X est une matrice fondamentale de solution de (1) si et seulement si ${}^t X^{-1}$ est une matrice fondamentale de solution de (1*). En particulier si $Z(t, t_0)$ est une résolvante de (1), alors $Z(t_0, t)$ est une résolvante de (1*).

12.3.2. Considérons une équation différentielle linéaire avec second membre (2) $\dot{y} = A(t)y + b(t)$, et supposons que les fonctions A et b soient périodiques, de même période T . Soit (1*) : $\dot{x} = - {}^t A(t)x$ l'équation adjointe de l'équation homogène associée à (2). Voici un critère d'existence d'une solution périodique de l'équation (2) ; (\cdot, \cdot) désigne le produit scalaire usuel sur \mathbb{R}^n .

12.3.3. Théorème

L'équation T -périodique (2) : $\dot{y} = A(t)y + b(t)$ admet une solution T -périodique si et seulement si, pour toute solution T -périodique x de (1*) : $\dot{x} = - {}^t A(t)x$, on a $\int_0^T (x(s), b(s)) ds = 0$.

Preuve : Soit $Z(t) = Z(t,0)$ la résolvante de (1) : $\dot{x} = A(t)x$. D'après (9.E.5.) la solution de (2) issue, pour $t = 0$, de x_0 est égale à $x(t) = Z(t) [x_0 + \int_0^t Z^{-1}(s) b(s) ds]$. D'après la remarque fondamentale elle est périodique si et seulement si $x_0 = Z(T) [x_0 + \int_0^T Z^{-1}(s) b(s) ds]$, ou encore $(Z^{-1}(T) - Id) x_0 = \int_0^T Z^{-1}(s) b(s) ds$. En d'autres termes, l'équation (2) admet une solution T -périodique si et seulement si le vecteur $v =: \int_0^T Z^{-1}(s) b(s) ds$ appartient à l'image de l'application linéaire ϕ de matrice $Z^{-1}(T) - Id$. Or, si ϕ^* désigne l'application adjointe de ϕ , on a $Im \phi = Ker \phi^*$; le vecteur v appartient donc à l'image de ϕ si et seulement si il est orthogonal à tous les vecteurs du noyau de ϕ^* , ou encore, pour tout $e \in \mathbb{R}^n$, si $\phi^*(e) = 0$ [H], alors $(v, e) = 0$ [C]. Réexprimons la condition [H] : $\phi^*(e) = 0$ équivaut à $(Z^{-1}(T) - Id) e = 0$, c'est-à-dire ${}^t Z^{-1}(T) e = e$; la condition [H] signifie donc que la solution $x(t) = {}^t Z^{-1}(t) e$ de l'équation (1*) est T -périodique.

Réexprimons à présent la condition [C] :

$$0 = (v, e) = \left(\int_0^T Z^{-1}(s) b(s) ds, e \right) = \int_0^T (Z^{-1}(s) b(s), e) ds$$

$$= \int_0^T (b(s), {}^t Z^{-1}(s) e) ds = \int_0^T (x(s), b(s)) ds, \text{ en notant à nouveau } x(t)$$

la solution ${}^t Z^{-1}(t) e$ de (1*) issue de e .

Finalement, la condition que, pour tout e , "si [H] alors [C]" équivaut bien au fait que $\int_0^T (x(s), b(s)) ds = 0$ pour toute solution T -périodique de l'équation (1*). CQFD.

12.E. EXERCICES

12.E.1. Propriétés de l'exponentielle d'une matrice $\exp A = \sum_{n=0}^{\infty} A^n/n!$

En multipliant ou dérivant terme à terme et en utilisant l'indication, entre crochets, établir les propriétés suivantes de $\exp A$:

12.E.2.

(i) Si $AB = BA$, alors $(\exp A)B = B \exp A$ [$A^n B = BA^n$]

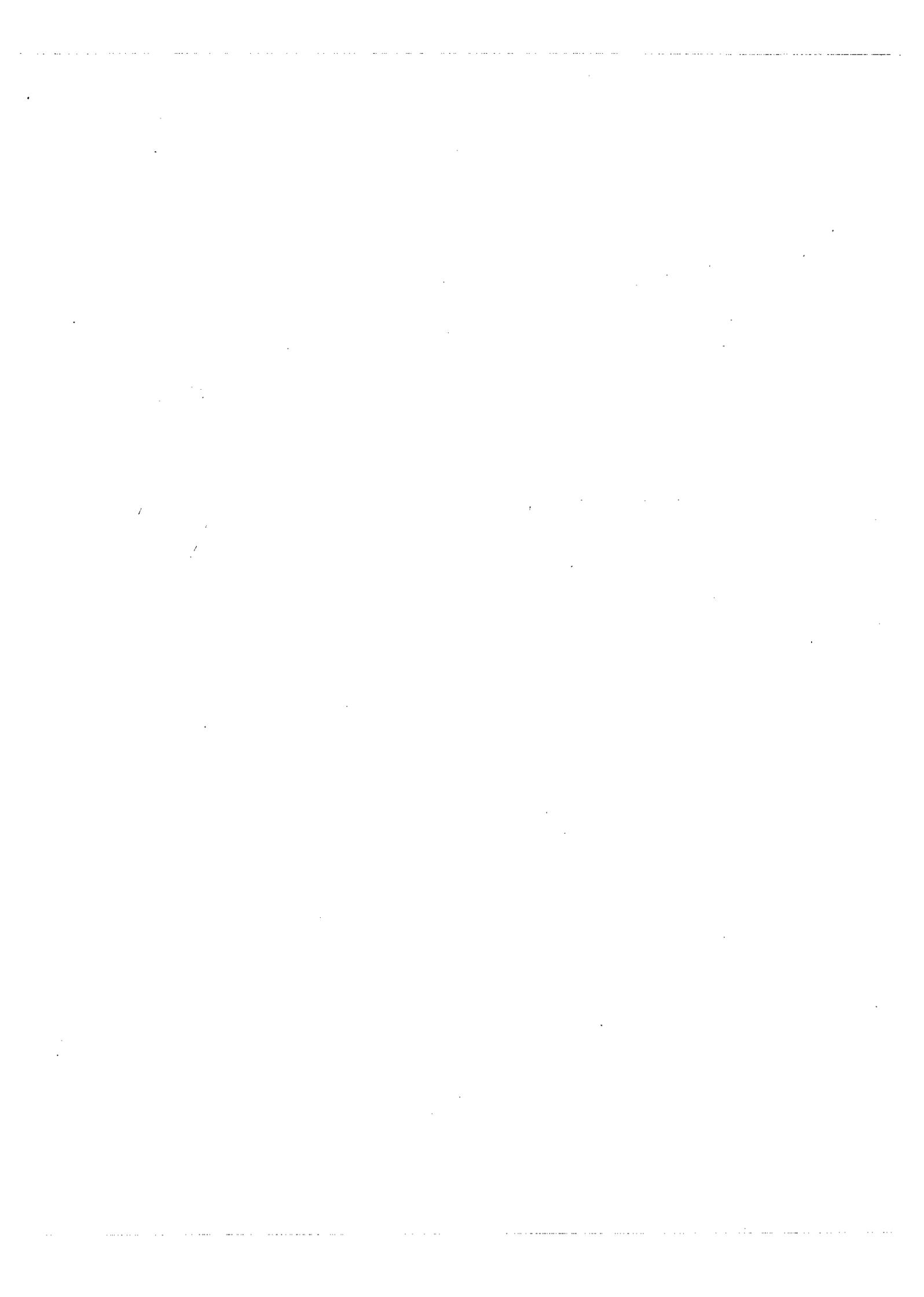
(ii) Si $AB = BA$, alors $\exp A \exp B = \exp (A+B)$

$$\left[\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p+q=n}^{\infty} ; C_n^q = \frac{n!}{(n-q)!q!} \right]$$

(iii) $\exp (SAS^{-1}) = S(\exp A) S^{-1}$ [$(SAS^{-1})^n = SA^n S^{-1}$]

(iv) $d(\exp tA) / dt = A(\exp tA)$

12.E.2. Montrer le lemme 12.1.4.



13. STABILITÉ DES CYCLES

Ce dernier chapitre est consacré à un théorème permettant de voir si une solution périodique d'un champ de vecteurs de \mathbb{R}^2 est asymptotiquement stable. La preuve de ce théorème nous amènera à utiliser la plupart des techniques que nous avons mises au point dans les deux parties de ce cours consacrées à la théorie qualitative et à la linéarisation. Rappelons que si $X = (X_1, \dots, X_n)$ est un champ de vecteur sur \mathbb{R}^n , la divergence $\text{div } X$ de X est le champ scalaire défini par

$$\text{div } X = \sum_{i=1}^n \partial X_i / \partial x_i .$$

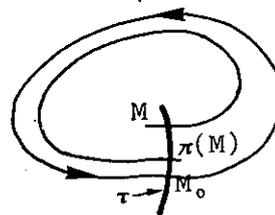
13.0. THEOREME

Soit $\gamma_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ une solution T -périodique ($T > 0$), non constante, d'un champ de vecteur $X \in \mathcal{C}^\infty$ sur un ouvert de \mathbb{R}^2 . Si $\oint_{\gamma_0} \text{div } X \, dt < 0$ alors γ_0 est asymptotiquement stable.

13.1. L'APPLICATION DE PREMIER RETOUR π , DE POINCARÉ

13.1.1. Soit $M_0 = \gamma_0(0)$ un point de l'orbite $\Gamma_0 = \gamma_0(\mathbb{R})$ de la solution périodique. L'objet central de la preuve du théorème est l'application de premier retour π , ou application de POINCARÉ, qui se définit géométriquement de la manière suivante :

soit τ un segment contenant M_0 dans son intérieur et transverse au champ X c'est-à-dire un segment nulle part tangent à X . Par hypothèse, la solution issue de M_0 recoupe τ après un temps T , et au point M_0 . Si un point M

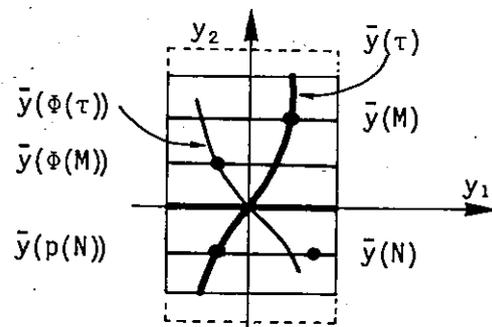
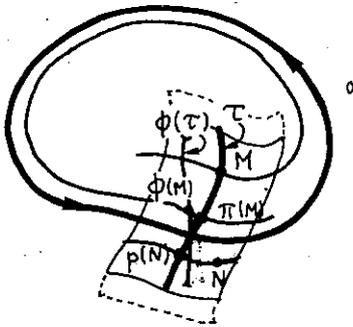


quelconque de τ est suffisamment près de M_0 , l'orbite de M recoupe τ en un point $\pi(M)$ (après un temps approximativement égal à T si τ est

petit). Le point $\pi(M)$ s'appelle le point de premier retour de l'orbite de M . Nous montrerons que si τ est suffisamment petit, sous les hypothèses du théorème, le premier retour $\pi(M)$ est défini pour tout $M \in \tau$. Nous obtenons alors une application $\pi: \tau \rightarrow \tau$, $M \mapsto \pi(M)$, appelée application de POINCARÉ. Evidemment M_0 est un point fixe de π . S'il est le seul, et plus précisément si $\pi^n(M) = \pi_0 \dots \circ \pi(M)$ tend vers M_0 quand n tend vers l'infini, cela montrera que toute solution de X issue de τ spirale en se rapprochant de Γ_0 et tend vers Γ_0 quand t tend vers $+\infty$: γ_0 est donc asymptotiquement stable.

Afin de montrer que π est définie, et de pouvoir calculer $\lim \pi^n(M)$, nous allons donner une expression de π en termes de fonctions connues.

13.1.2. Comme la solution γ_0 issue de M_0 est définie sur tout \mathbb{R} , il existe un voisinage U de M_0 pour lequel toute solution issue de U est définie sur $[0, T]$ au moins, puisque le système dynamique local maximal ϕ associé à X (7.2.4.) a un ouvert pour domaine. Soit $\phi: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application définie par $\phi(x) = \phi(x, T)$ (voir figure). Quitte à restreindre U on peut supposer qu'il existe un difféomorphisme $y = \bar{y}(x)$ défini sur U par lequel le champ X se redresse (7.3.5.) sur le champ $\dot{y}_1 = 1, \dot{y}_2 = 0$. Soit à présent τ un segment ouvert quelconque de \mathbb{R}^2 , transverse au champ X , et contenant M_0 (on précisera le choix de τ ultérieurement). Comme U est un ouvert de redressement on peut, quitte à réduire encore U , définir la projection $p: U \rightarrow \tau$ qui à tout point N de U associe sa "projection sur τ le long des trajectoires", c'est-à-dire l'intersection du segment de trajectoire de N contenu dans U avec le segment τ . En notant $\phi|_{\tau}$ la restriction de ϕ au segment τ , on voit que $\pi = p \circ \phi|_{\tau}$, qui est définie sur un voisinage (dans τ) de M_0 .



13.2.1.

13.2. CALCUL DE LA DERIVEE $\pi'(M_0)$

13.2.1. Rappel : Nous avons vu (11.2.) que $\text{Jac } \phi(t, M_0)$ est la matrice résolvante $Z(t, 0)$ de l'équation aux variations $\dot{x} = \text{Jac } X(\gamma_0(t)) \cdot x$ associée à la solution γ_0 . En particulier $\text{Jac } \phi(M_0) = Z(T, 0)$. Ceci va nous permettre de montrer que, sous les hypothèses du théorème, on a $|\pi'(M_0)| < 1$. Notons que l'équation aux variations est périodique puisque γ_0 est périodique ; $\text{Jac } \phi(M_0)$ est précisément la monodromie de cette équation linéaire périodique.

13.2.2. Proposition

Le produit des valeurs propres de $\text{Jac } \phi(M_0)$ est égal à l'exponentielle de $\oint_{\gamma_0} \text{div } X$.

Preuve : Le produit des valeurs propres de $\text{Jac } \phi(M_0) (= Z(T, 0))$ est égal au déterminant de $Z(T, 0)$, c'est-à-dire la valeur $W(T)$ du Wronskien (6.4.) de l'équation aux variations de γ_0 , à l'instant $t = T$. Or, d'après la formule de LIOUVILLE (6.4.5.), $W(T)$ est égal à l'exponentielle de $\int_0^T \text{Trace}(\text{Jac } X(\gamma_0(t))) dt$, c'est-à-dire, précisément l'exponentielle de $\oint_{\gamma_0} \text{div } X dt$. CQFD.

13.2.3. Proposition

$X(M_0) (= \dot{\gamma}_0(0))$ est un vecteur propre de $\text{Jac } \phi$, associé à la valeur propre 1.

Preuve : Comme γ_0 est une solution de X , c'est-à-dire une solution de l'équation autonome $\dot{x} = X(x)$, pour tout $h \in \mathbb{R}$, la fonction $\gamma_h(t) = \gamma_0(t+h)$ est aussi une solution de X (voir la remarque fondamentale 7.1.8.). Comme X est \mathcal{C}^∞ , il en est de même de γ_h :

$$\frac{d}{dt} \gamma_h(t) = X(\gamma_h(t))$$

A présent $\frac{\partial}{\partial h} \Big|_{h=0} \frac{d}{dt} \gamma_h = \frac{\partial}{\partial h} \Big|_{h=0} X \circ \gamma_h = \text{Jac } X(\gamma_0) \cdot \frac{\partial}{\partial h} \Big|_{h=0} \gamma_h$

or $\frac{\partial}{\partial h} \Big|_{h=0} \gamma_h(t) = \frac{\partial}{\partial h} \Big|_{h=0} \gamma_0(t+h) = \dot{\gamma}_0(t)$

et de même $\frac{\partial}{\partial h} \Big|_{h=0} \dot{\gamma}_h(t) = \frac{\partial}{\partial h} \Big|_{h=0} \dot{\gamma}_0(t+h) = \ddot{\gamma}_0(t)$

d'où $\frac{d}{dt} \dot{\gamma}_0(t) = \text{Jac } X(\gamma_0(t)) \cdot \dot{\gamma}_0(t)$

En d'autres termes $\dot{\gamma}_0(t)$ est une solution de l'équation aux variations associées à γ_0 , d'où

$$\text{Jac } \Phi(M_0) \cdot \dot{\gamma}_0(0) = Z(T, 0) \cdot \dot{\gamma}_0(0) = \dot{\gamma}(T) = \dot{\gamma}(0)$$

la dernière égalité résultant du fait que γ , et donc $\dot{\gamma}$, est T-périodique. Enfin, comme $M_0 = \gamma(0)$ n'est pas un point stationnaire, $X(M_0) = \dot{\gamma}_0(0)$ n'est pas nul. CQFD.

13.2.4. Remarque : Le rappel (13.2.1.) et la preuve des deux propositions précédentes ne font pas usage du fait que la "variété ambiante" est \mathbb{R}^2 : ces propositions s'appliquent donc également pour le cas d'un cycle γ_0 d'un champ sur une variété V^n quelconque.

13.2.5. Lemme

Sous les hypothèses du théorème, et pour un choix convenable de τ , on a $0 < \pi'(M_0) < 1$.

13.2.6.

Preuve : Par hypothèse, $\oint_{\gamma_0} \text{div } X < 0$; ceci entraîne d'après la première proposition, que le produit des valeurs propres de $\text{Jac } \Phi(M_0)$ est strictement compris entre 0 et 1 . D'après la seconde proposition l'une de ces valeurs propres est égale à 1 . Pour la seconde, λ , on a donc $0 < \lambda < 1$. En particulier λ est distinct de la valeur propre 1 ; il existe donc un vecteur propre v , indépendant du vecteur propre $X(M_0)$, associé à la valeur propre λ . On choisit τ de façon que l'espace tangent $T_{M_0} \tau$ soit engendré par v . Ainsi, $D\Phi|_{\tau}(M_0) : T_{M_0} \tau \rightarrow T_{M_0} \tau$ est égal à la multiplication par λ . $D\Phi|_{\tau}(M_0)[\alpha v_0] = \lambda(\alpha v_0)$. Par ailleurs, la projection p étant égale à l'identité sur τ , on en déduit que $Dp(M_0) : \mathbb{R}^2 \rightarrow T_{M_0} \tau$ est égal à l'identité sur les vecteurs $v = \alpha v_0$ de $T_{M_0} \tau$. Comme $\pi = p \circ \Phi|_{\tau}$, on a donc $\pi'(M_0) v = D(p \circ \Phi|_{\tau})(M_0) [v] = Dp(M_0) [D\Phi|_{\tau}(M_0) [v]] = Dp(M_0) [\lambda v] = \lambda v$. D'où $\pi'(M_0) = \lambda$. CQFD.

13.2.6. Remarque : Il est facile de voir que si l'on choisit un segment transverse $\bar{\tau}$ différemment que dans la preuve du lemme, l'application de POINCARÉ $\bar{\pi} = \bar{p} \circ \bar{\Phi}|_{\bar{\tau}}$ correspondante est conjuguée à l'application que nous avons choisie (i.e. il existe un difféomorphisme $h : (\tau, M_0) \rightarrow (\bar{\tau}, M_0)$ tel que $\bar{\pi} = h \circ \pi \circ h^{-1}$) , et, donc $\bar{\pi}'(M_0) = h'(M_0) \cdot \pi'(M_0) \cdot (h^{-1})'(M_0) = \pi'(M_0) \cdot h'(M_0) \cdot (h^{-1})'(M_0)$ ($\text{Gl}(1, \mathbb{R})$ est commutatif !) et donc $\bar{\pi}'(M_0) = \pi'(M_0)$. Il n'est donc pas indispensable de procéder au choix de τ , comme nous l'avons fait dans un souci de simplification du calcul de $\pi'(M_0)$.

13.3. PREUVE DU THEOREME

D'après le lemme, $|\pi'(M_0)| = \lambda < 1$. On a donc, pour M_0 suffisamment voisin de M_0 , $|\pi(M) - \pi(M_0)| < k |M - M_0|$, avec $\lambda < k < 1$. Comme $\pi(M_0) = M_0$, on en déduit que

$$(1) \quad |\pi(M) - M_0| < k |M - M_0|$$

En d'autres termes, comme $k < 1$, il existe un sous-segement $\bar{\tau}$ de τ tel que l'image par τ de tout point de $\bar{\tau}$ appartient à $\bar{\tau}$. Quitte à réduire τ à $\bar{\tau}$, on peut donc supposer que $\pi(\tau) \subset \tau$. On peut donc former les applications composées $\pi^2 = \pi \circ \pi$, ..., $\pi^n = \pi \circ \dots \circ \pi$ (n fois) et, d'après (1), pour tout $M \in \tau$, on a $|\pi^n(M) - M_0| < k |\pi^{n-1}(M) - M_0|$ d'où, par récurrence :

$$|\pi^n(M) - M_0| < k^n |M - M_0|$$

Comme $|k| < 1$, on en déduit immédiatement que $\lim_{n \rightarrow \infty} \pi^n(M) = M_0$: toute solution issue de $\text{Sat } \tau = \text{Sat } U$ spirale donc vers γ_0 . CQFD.

Application: Pour ε suffisamment petit > 0 , l'équation de Van der Pol $\varepsilon \ddot{x} + (x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$ admet une unique solution périodique. Celle-ci est asymptotiquement stable.

REPONSES DES EXERCICES

1.E.1. $y = z + \sum_{p=2}^{\infty} z^p / p(p-1) ; R = 1$

2.E.2. (i) non ; (ii) $a_n = (-1)^n n!$; (iii) $R = 0$: l'équation n'admet pas de solution définie en 0 ; (iv) en posant $\dot{y} = dy/dZ$ et $\ddot{y} = d^2y^2/dZ^2$, (1) devient $Z\ddot{y} + (1-Z)\dot{y} = 0$
 $y_2(1/Z) = \sum Z^n / n! = e^Z$; (v) non.

3.E.1. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \frac{1}{z} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} ; y = az + bz^2$, avec $a, b \in \mathbb{C}$.

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}' = \frac{1}{z} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} ; 1$ est une valeur propre trip

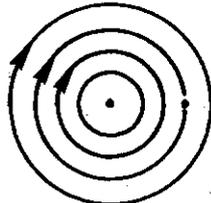
$y = (a+b+2c)z - (b+2c)z \log z + cz (\log z)^2$, avec $a, b, c \in \mathbb{C}$

3.E.4. Choisir r tel que $\phi_0(0) \neq 0$; avec $\sigma = s'$ on a
 $z \sigma' + (2r + 2z \phi_0'/\phi_0 + a_1)\sigma = 0$.

3.E.5. $y_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1/(1-z)$

$y = (a + b \log z) / (1-z)$, avec $a, b \in \mathbb{C}$.

5.E.3.

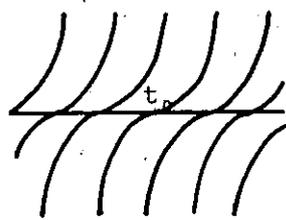


$$\begin{cases} \dot{x} = -((x-1)^2 + y^2)y \\ \dot{y} = +((x-1)^2 + y^2)x \end{cases}$$

6.E.2. f n'est pas localement lipschitzienne en $(0,0)$;
 $\phi_n(t,x) = (-1)^n t^2$; la suite (ϕ_n) ne converge pas.

7.E.2. $\begin{cases} \dot{x} = 1 \\ \dot{y} = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = y \end{cases}$; $\begin{cases} \dot{x} = 1 \\ \dot{y} = -y \end{cases}$; $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$

7.E.3. $t\dot{x} = 3x$; $t(t-2)\ddot{x} - (t-2)\dot{x} + 2(t-1)x = 0$;



$\dot{x} = 3x^{2/3}$, qui constitue un exemple d'équation différentielle admettant une infinité de solutions telles que $x(t_0) = 0$.

7.E.6. $\Sigma_y = \begin{cases} \dot{y}_1 = y_2^2 - y_1^2 - 1 \\ \dot{y}_2 = -2y_1 y_2 \end{cases}$

On notera que si on pose $z = x_1 + i x_2$, Σ_x équivaut à $\dot{z} = z^2 + 1$ et pour $Z = y_1 + i y_2$, on a $zZ = 1$. Avec ces notations Σ_y^i équivaut à $\dot{z} = z^3$, et Σ_x^i équivaut à $\dot{z} = -1/Z$.

Le champ X est complet car la sphère est compacte (voir le théorème de prolongement 7.2.7.).

8.E.2. $\omega^+(p)$ est la réunion des deux trajectoires droites (horizontales) : il n'est ni compact, ni connexe.

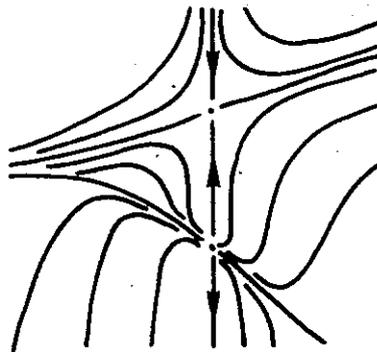
9.E.10.1. $x = a(1+1/t) + b(t/2+1 - (t+1)(\log|t+1|)/t)$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

9.E.10.2. $x = e^t(a + b \cdot t^2)$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.

9.E.10. $\ddot{y} = (a_1 + 1/a_2)\dot{y} - a_0 a_2 y$.

(10.E.1. (2,4) est un noeud, (-1,1) est un col.
(1,1) est un foyer, (-1,1) est un col.

10.E.2. (2,1) est un col, (2,-1) est un noeud.
la droite $x = 2$ est saturée.

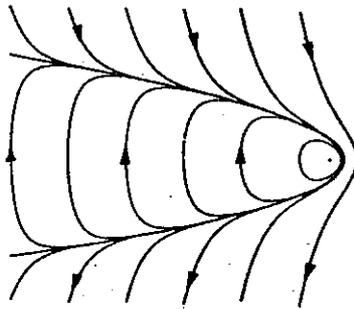


10.E.3. i) $Y: \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (0,0) est un centre.

ii) $1/2 - t^2/4$; iii) $y^2 + x = C e^{-2x} + 1/2$.

iv) $L(x,y) = e^{2x}(y^2 + x - 1/2)$: (0,0) est positivement et négativement stable au sens de Lyapunov mais pas asymptotiquement (voir 8.E.3.).

v)



vi)

$$X_a \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - (y-a)^2 \end{cases} \quad Y_a = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

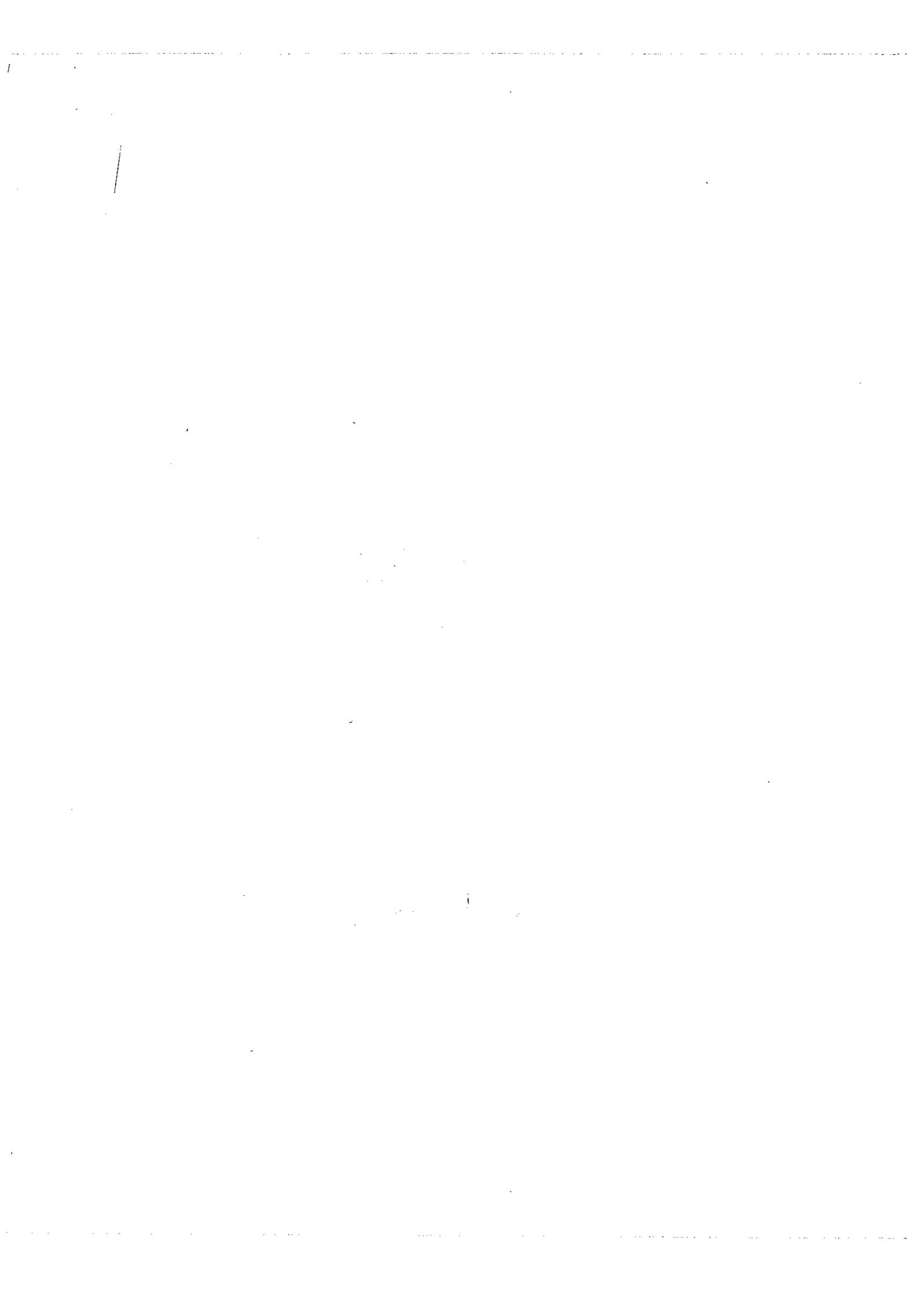
vii)

- $a \leq -1$ noeud stable
 - $-1 < a < 0$ foyer stable
 - $a = 0$ centre (iv)
 - $0 < a < +1$ foyer instable
 - $1 \leq a$ noeud instable.
-

I N D E X

Approximations successives (méthode des-)	6.2.1.
Asymptotiquement stable	8.2.1.
Bassin d'attraction	8.2.8.
Centre	10.2.3.
Changement d'inconnue	7.3.1.
Champ de vecteurs	7.1.1.
Complet (champ de vecteurs-)	7.2.5.
Col	10.2.3.
Conjugués (champ de vecteurs-)	10.1.2.
Déterminant wronskien	9.5.1.
Ensemble invariant	5.2.4.
Ensembles limités ω^+ , ω^-	5.3.2.
Equation adjointe	9.E.4.
Equation autonome	7.1.6.
Equation aux variations	11.2.
Equation à variables séparables	4.1.1.
Equation de BERNOULLI	4.2.2.
Equation de BESSEL	3.2.
Equation de CLAIRAUT	4.3.
Equation d'EULER	3.2.
Equation de FUCHS	3.2.
Equation d'HERMITTE	2.E.1.
Equation de LAGRANGES	4.3.
Equation de RICCATI	4.2.3.
Equation d'ordre n	2.2.1.
Equation homogène	4.1.3.
Equation hypergéométrique	3.E.3.
Equation linéaire avec second membre	4.2.1.
Equation résolue en y	4.3.
Famille fondamentale de solutions	9.3.2.
Feuilletage	1.1.5.
Fonction de LYAPUNOV	8.3.2.
Fonction k -lipschitzienne en x	6.3.1.
Fonction transcendante	6.1.
Formule de LIOUVILLE	9.4.5.
Foyer	10.2.3.
Générique (champ linéaire-)	10.1.5.
Groupe à un paramètre de difféomorphismes	5.1.4.
Identité d'ABEL	9.5.3.
Isocline	6.E.4.
Linéarisé d'un champ de vecteurs	10.3.1.
Matrice de monodromie	12.1.3.
Matrice fondamentale de solutions	9.3.2.
Matrice résolvante	9.3.3.

Méthode des isoclines	6.E.4.
Noeud	10.2.3.
Orbite (d'un champ de vecteurs)	7.1.1.
Orbite (d'un système dynamique)	5.2.1.
Périodique	5.E.3.
Point singulier régulier	3.1.1.
Point stationnaire	5.E.2.
Polynôme d'HERMITE	2.E.1.
Pseudo périodique	12.2.3.
Relation d'équivalence ouverte	5.2.2.
RUNGE-KUTTA (méthode de-)	6.A.
Saturé de A, Sat A	5.2.2.
Solution générale (locale)	6.2.1.
Stable au sens de LAGRANGES	8.1.1.
Stable au sens de LYAPUNOV	8.2.1.
Système dynamique	5.1.1.
Système dynamique local	7.2.2.
Système dynamique local maximal	7.2.4.
Système linéaire à coefficients constants (complexe)	2.3.
Système linéaire à coefficients constants (réel)	7.2.6,3.
Théorème de LYAPUNOV	8.3.4.
Théorème de prolongement	7.2.7.
Théorème de redressement	7.3.5.
Trajectoire (d'un champ de vecteurs)	7.1.1.
Trajectoire (d'un système dynamique)	5.2.1.
Transformation de LAPLACE	2.A.
Valeur caractéristique	12.2.1.
Voisinage en brosse	7.2.1.
Wronskien	9.4.1.



طبع على مطابع مؤسسة الكرامة

عمان - ص . ب 425309

هاتف 661623

تلکس 21137

NUMERO D'EDITION: 1346 - 7 - 83