Université de Nice
Département de Mathématiques[1] Maîtrise MASS

Notes de cours 1 :
Le mouvement brownien

- **Historique :** R. Brown (botaniste anglais, 1827), L. Bachelier (mathématicien français, 1900), A. Einstein (physicien allemand, 1905), N. Wiener (mathématicien américain, 1923), A. Kolmogorov (mathématicien russe, 1933), P. Levy (mathématicien français, 1939), K. Ito (mathématicien japonais, 1948).

- **Processus stochastiques** (ou fonctions aléatoires) :

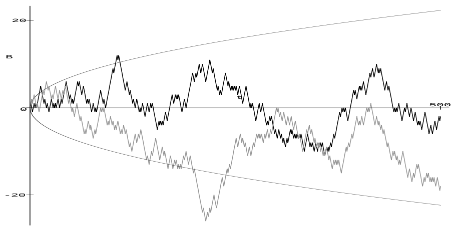
  $\mathbb{T}$ epace des temps : généralement $\mathbb{R}^+$, ou $\mathbb{N}$ ou $\{0, \delta t, 2\delta t, \ldots, N\delta t = T\}$.

  Ω espace des épreuves ou des "états du monde" : un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ quelconque.

  $X_t : \mathbb{T} \times \Omega \to \mathbb{R}$, $(t, \omega) \mapsto X_t(\omega)$. A t fixé, $\omega \mapsto X_t(\omega)$ est une variable aléatoire sur Ω. A ω fixé, $t \mapsto X_t(\omega)$ est une trajectoire du processus.

- **Mouvement brownien :** Un mouvement brownien (standard réel) est un processus stochastique $B_t : \mathbb{R}^+ \times \Omega \to \mathbb{R}$ à trajectoires continues tel que

  1. $B_0 = 0$
  2. Pour tout $0 \leq s < t$, on a $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, \sqrt{t-s})$
  3. Pour tout $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, les v.a. $\{B_{t_{i+1}} - B_{t_i}, i = 0, \ldots, n-1\}$ sont indépendantes.



- **Propriétés :**

  1. Propriétés de symétrie : si (B_t) est un brownien alors $(-B_t)$ est un brownien.
  2. Propriétés d'échelle : si (B_t) est un brownien alors pour tout $c > 0$, $\frac{1}{c}(B_{c^2 t})$ est un brownien.
  3. Propriétés de translation : si (B_t) est un brownien alors pour tout h, $(B_{t+h}) - (B_h)$ est un brownien.
  4. Propriétés de retournement : si (B_t) est un brownien sur $[0, T]$ alors, $(B_T) - (B_{T-t})$ est un brownien sur $[0, T]$.
  5. Comportement à l'infini : si (B_t) est un brownien alors $(tB_{1/t})$ est un brownien et on a p.s. : $\frac{B_t}{t} \to 0$.

- **Variation totale et variation quadratique :** les trajectoires du mouvement brownien sont des fonctions continues (par définition) mais elles sont p.s. "nulle part différentiables". On a notamment les deux propriétés suivantes : si $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_n = t$ est une subdivision σ de l'intervalle $[0, t]$, alors la variation totale, définie par

  $$V_t(\omega) := \sup_\sigma \sum_i |B_{t_{i+1}}(\omega) - B_{t_i}(\omega)|$$

  vérifie $V_t(\omega) = +\infty$ p.s.

  Et, si σ_n est une suite de partitions de $[0, t]$ telle que $\lim_{n\to\infty} \|\sigma_n\| := \sup_i |t_{i+1} - t_i| = 0$, alors

  $$\lim_{n\to\infty} \sum_i |B_{t_{i+1}}(\omega) - B_{t_i}(\omega)|^2 = t.$$

- **Exercices :**

1. Rappeler les propriétés caractéristiques d'un mouvement brownien (*en abrégé :* MB) $(B_t)_{t\geq 0}$. Montrer que si $(B_t)_{t\geq 0}$ est un MB, alors $(B_T - B_{T-t})_{t\geq 0}$ est un MB. En déduire que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue et bornée, alors
$$\mathbb{E}f(B_t) = \mathbb{E}f(B_T - B_{T-t}).$$
Montrer qu'on a de même que
$$\mathbb{E}f(B_{T-t}) = \mathbb{E}f(B_T - B_t).$$
Soit $S_t := e^{\rho t+\sigma B_t}$. Montrer que
$$\mathbb{E}(S_T \mid S_t = y) = y\mathbb{E}(S_{T-t}).$$
2. Soit Z un v.a. suivant une loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma) = \mathcal{N}(0,1)$. On pose $X_t := \sqrt{t}Z$. Alors le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est à trajectoires continues et X_t suit une loi normale $\mathcal{N}(0,\sqrt{t})$; le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est-il un mouvement brownien (MB) ?
3. Soient $(B_t)_{t\geq 0}$ et $(\tilde{B}_t)_{t\geq 0}$ deux MB indépendants, et soit $\rho \in [-1,+1]$ un nombre. On pose
$$Y_t := \rho B_t + \sqrt{1-\rho^2}\tilde{B}_t.$$
Le processus $(Y_t)_{t\geq 0}$ est-il un MB ?
4. On rappelle que si les X_j, $j = 1,2,...$ sont des v.a. iid d'espérance finie, la loi des grands nombres assure que
$$\lim \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j = \mathbb{E}X_1 \quad p.s. \text{ ;}$$
calculer la limite presque-sûre de $\frac{1}{n}B_n$.
5. **Marche de Wiener et Mouvement brownien.** Soit $\delta t > 0$ i-petit, $\mathbb{T}_\infty :=]0..\infty[_{\delta t}= \{\delta t, 2\delta t, 3\delta t, ...\}$. $\mathbb{T}_N :=]0..N\delta t[_{\delta t}= \{\delta t, 2\delta t, 3\delta t, ..., N\delta t\}$. On choisit une fois pour toute un N i-grand tel que $N\delta t$ soit i-grand, et on pose $\mathbb{T} = \mathbb{T}_N$. Soit $(\delta W_t)_{t\in\mathbb{T}}$ une suite de v.a. i.i.d., avec
$$\delta W_t = \pm\sqrt{\delta t} \text{ et } \Pr\{\delta W_t = +\sqrt{\delta t}\} = \frac{1}{2} = \Pr\{\delta W_t = -\sqrt{\delta t}\}.$$
La marche $(W_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est défnie par récurrence par $W_0 = 0$ et $W_t = W_{t-\delta t} + \delta W_t$.
   (a) Soit $t = n\delta t \in \mathbb{T}$ appréciable ; montrer que n est i-grand.
   (b) Montrer, par récurrence sur n, que $W_t \in [-n\sqrt{\delta t}..n\sqrt{\delta t}]_{\delta x} := \{-n\sqrt{\delta t} + j\delta x \mid j = 0..n\}$, où $\delta x := 2\sqrt{\delta t}$. Faire un dessin pour $n = 0..3$.
   (c) Montrer, par récurrence sur n, que
   $$p_{nj} := \Pr\{W_t = -n\sqrt{\delta t} + j\delta x\} = \frac{1}{2^n}\begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix}.$$
   (d) On rappelle que, pour n i-grand, on a la *formule de Stirling*,
   $$n\,! = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi}\sqrt{n}(1+\phi).$$
   Montrer que si n, j, $n-j$ sont i-grand, on a
   $$p_{nj} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{x^2}{2t}}(1+\phi) \text{ , où } x = x_{nj} = -n\sqrt{\delta t} + j\delta x.$$
   (e) On pose toujours $x = -n\sqrt{\delta t} + j\delta x$; on suppose x appréciable. Montrer que
   $$\Pr\{W_t \leq x\} = (1+\phi)\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{\xi^2}{2t}}d\xi.$$
   (f) Montrer que pour $s < t$ dans $\mathbb{T}$ appréciables, $W_t - W_s$ a même loi que W_{t-s}.

6. Soit (B_t) un mouvement brownien. On rappelle que la loi de B_t est définie par la densité $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}$, i.e. $\Pr\{B_t \leq x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2t}} dy$. Trouver la densité de B_t^2.
7. On dit qu'un processus stochastique $(X_t)_{t\geq 0}$ est un *processus gaussien* si toute combinaison linéaire finie de ces variables aléatoires X_t est encore une v.a. gaussienne c'est-à-dire si

$$\forall n, \ \ \forall t_1 < \ldots < t_n, \ \ \forall (a_i)_{i=1,\ldots,n}, \ \ \sum_{i=1}^{n} a_i X_{t_i} \sim \mathcal{N}(m, \sigma).$$

   (a) Montrer que le mouvement brownien $(B_t)_{t\geq 0}$ est un processus gaussien.
   (b) Montrer que pour tout $0 \leq s \leq t$, on a : $\mathbb{E}(B_s B_t) = \mathbb{E}(B_s^2) = s$.
   (c) A tout processus gaussien $(X_t)_{t\geq 0}$ on peut associer sa *fonction de covariance* notée $F(s,t)$

$$F(s,t) := \mathbb{E}((X_s - \mathbb{E}X_s)(X_t - \mathbb{E}X_t)).$$

   Calculer la fonction de covariance du mouvement brownien. **Rep :** $F(s,t) = s$ si $0 \leq s \leq t$.
   (d) On dit qu'un processus possède la *propriété d'autosimilarité* si pour tout $a > 0$, il existe $b > 0$ tel que X_{at} et bX_t aient même loi. Montrer que le mouvement brownien possède la propriété d'autosimilarité (c'est-à-dire calculer b en fonction de a si $X_t = B_t$). **Rep :** $b = \sqrt{a}$
8. Rappelons que si X est une v.a. absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, on note f_X sa densité. Ainsi, par définition de la fonction de répartition F_X de X,

$$F_X(x_0) := \mathbb{P}\{X \leq x_0\} = \int_{-\infty}^{x_0} f_X(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{I}_{]-\infty,x_0]}(x) f_X(x)dx,$$

   et, plus généralement, pour toute partie $A \in \mathcal{B}$,

$$\mathbb{P}\{X \in A\} = \int_A f_X(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{I}_A(x) f_X(x)dx.$$

   Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un processus brownien. On pose pour $0 \leq s \leq t$, $X := B_s$, et $Y := B_t$. Determiner $f_{X,Y}(x,y)$. Les v.a. X et Y sont-elles indépendantes? (*Indication :* considérer la v.a. $U := B_t - B_s$ et $V := B_s - B_0$). Déterminer la densité $f_{Y|X}(y|x)$ de la variable aléatoire $Z := \mathbb{E}(Y|X)$. Même question dans le cas où $X := e^{B_s}$ et $Y := e^{B_t}$.
9. Soit (B_t) un mouvement brownien et soit $f(x)$ une fonction de classe $\mathcal{C}_b^1$. Trouver une fonction $h(t,x)$ telle que

$$\mathbb{E}[f'(B_t)] = \mathbb{E}[f(B_t)h(B_t,t)].$$

10. **Non-dérivabilité presque-sûre des trajectoires du processus brownien[2].** Soit $B := (B_t)_{t\in[0,T]}$ un mouvement (processus) brownien. Rappelons qu'une *trajectoire* de B est une fonction $x \ : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie de la manière suivante : soit $\omega \in \Omega$ un élément de l'espace probabilisé sous-jacent au processus B. La trajectoire x associée à ω est définie par $x_\omega(t) := B_t(\omega)$. On note $\mathcal{B}$ l'ensemble des trajectoires de B que l'on munit de la probabilité image de celle de Ω. Comme les v.a. B_t sont mesurables sur Ω, les v.a. $x \mapsto x(t)$ sont mesurables sur $\mathcal{B}$, pour tout $t \in [0,T]$.

    Nous nous proposons de montrer que l'ensemble $\mathcal{D}$ $(\subset \mathcal{B})$ des tractoires de B qui ont une dérivée en un point $s \in [0,T]$ au moins est un ensemble *négligeable*, c'est-à-dire que $\Pr(\mathcal{D}) = 0$. Pour démontrer ce théorème, standard, nous pouvons, par transfert, supposer que B (et donc T, $\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$, $\Pr$) sont standard. Nous disposons des résultats suivants de la théorie de la mesure :

    (a) Si $\mathcal{N} = \bigcup_\beta \mathcal{N}_\beta$ est une réunion *dénombrable* d'ensembles négligeables, alors $\mathcal{N}$ est négligeable.
    (b) Si $\mathcal{S}$ est un ensemble standard, et s'il existe $\mathcal{M}$ mesurable, $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{M}$, tel que $\Pr(\mathcal{M}) \simeq 0$, alors $\mathcal{S}$ est négligeable.
    (c) Si $\mathcal{E}$ est un ensemble, et s'il existe des ensembles mesurables $\mathcal{M}_- \subseteq \mathcal{M}_+$ tels que $\mathcal{M}_- \subseteq \mathcal{E} \subseteq \mathcal{M}_+$ et $\Pr(\mathcal{M}_-) \simeq \Pr(\mathcal{M}_+)$, alors $\mathcal{E}$ est mesurable, et bien-entendu $\Pr(\mathcal{E}) \simeq \Pr(\mathcal{M}_\pm)$.

[2] D'après Dvoretski, A., Erdös, P., et Kakutani, S. "Nonincrease everywhere of the Brownian motion process", *Proc. 4th Berkeley Symp. on Math. Stat. and Prob.* Vol. II, 103-116 (1961), et Breiman, L. "Probability", SIAM classics in Applied Mathematics, Robert O'Malley ed., 261-262 (1992).

Calculs :

(a) Pour tout $\beta \geq 0$ et tout $n > 0$, on pose

$$\mathcal{A}_{\beta,n} = \left\{ x \in \mathcal{B} \;\middle|\; \exists s \in [0,T] \;\; \forall t \in [0,T] \;\; |t-s| \leq \frac{2}{n} \Rightarrow |x(t) - x(s)| \leq 2\beta|t-s| \right\}.$$

Montrer que, pour chaque $\beta \geq 0$, les $\mathcal{A}_{\beta,n}$ forment, pour $n = 1, 2, ..$ une suite croissante de sous-ensembles de $\mathcal{B}$, et que $\mathcal{A}_\beta := \bigcup_{n=1,2,..} \mathcal{A}_{\beta,n}$ contient toutes les trajectoires admettant en un $s \in [0,T]$ au moins une dérivée $x'(s)$ telle que $|x'(s)| < \beta$, et donc que $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{A} := \bigcup_{\beta=1,2,..} \mathcal{A}_\beta$.

(b) Pour $n > 0$ et $0 \leq k \leq n$ entiers, posons $t_{n,k} := k\frac{T}{n}$. Pour toute trajectoire $x \in \mathcal{B}$ et tout $0 \leq k \leq n-3$ entiers, on pose

$$y_{n,k}(x) \;\; := \mathrm{Max}\left\{|x(t_{n,k}) - x(t_{n,k+1})|, |x(t_{n,k+1}) - x(t_{n,k+2})|, |x(t_{n,k+2}) - x(t_{n,k+3})|\right\} \text{ , et}$$

$$\mathcal{B}_{\beta,n} = \left\{ x \in \mathcal{B} \;\middle|\; \exists k \;\; , \;\; y_{n,k}(x) \leq \frac{10\beta}{n} \right\}.$$

Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\mathcal{B}_{\beta,n} = \bigcup_{k=0}^{n-3} \left\{ x \in \mathcal{B} \;\middle|\; y_{n,k}(x) \leq \frac{10\beta}{n} \right\}$, et que $\mathcal{A}_{\beta,n} \subseteq \mathcal{B}_{\beta,n}$. (Indication : choisir k tel que $0 \leq k \leq n-3$ et $s \in [t_k, t_{k+3}]$).

(c) Montrer que

$$\mathrm{Pr}_{\,\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\beta,n}) \leq (n-2) \left(\mathrm{Pr}_{\,\Omega} \left\{ |B_{t_{n,1}}| \leq \frac{10\beta}{n} \right\} \right)^3 = (n-2) \left(\sqrt{\frac{n}{2\pi}} \int_{-10\beta/n}^{+10\beta/n} e^{-nx^2/2} \right)^3.$$

(Indication : $\mathrm{Pr}_{\,\mathcal{B}} \left\{ x \in \mathcal{B} \;\middle|\; |x(t_{n,j}) - x(t_{n,j+1})| \leq \frac{10\beta}{n} \right\} = \mathrm{Pr}_{\,\Omega} \left\{ \omega \in \Omega \;\middle|\; |B_{t_{n,j}}(\omega) - B_{t_{n,j+1}}(\omega)| \leq \frac{10\beta}{n} \right\}$ puisque $\mathcal{B}$ a été muni de la probabilité image de celle de Ω.)

(d) En effectuant le changement de variable $y = nx$, en déduire que $\lim_n \mathrm{Pr}_{\,\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\beta,n}) = 0$.

Déductions : Soit β standard.

(a) La suite $(\mathcal{B}_{\beta,n})_{n\geq 1}$ est-elle standard ? Soit N i-grand ; montrer que $\mathrm{Pr}_{\,\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\beta,N} \simeq 0)$.

(b) Soit n standard et toujours N i-grand ; montrer que $\mathcal{A}_{\beta,n} \subseteq \mathcal{B}_{\beta,N}$ et en déduire que $\mathcal{A}_{\beta,n}$ est négligeable.

(c) La suite $(\mathcal{A}_{\beta,n})_{n\geq 1}$ est-elle standard ? En déduire que tous ses termes, d'indice standard ou non, sont négligeables.

(d) Montrer que $\mathcal{A}_\beta := \bigcup_{n=1,2,..} \mathcal{A}_{\beta,n}$ est négligeable.

(e) Dorénavant β est une variable entière quelconque. La suite $(\mathcal{A}_\beta)_{\beta\geq 0}$ est-elle standard ? En déduire que tous ses termes, d'indice standard ou non, sont négligeables.

(f) Montrer que $\mathcal{A} := \bigcup_{\beta=0,1,..} \mathcal{A}_\beta$ est négligeable.

(g) En déduire que $\mathcal{D}$ est négligeable (cqfd).