Université de Nice
Département de Mathématiques[1]

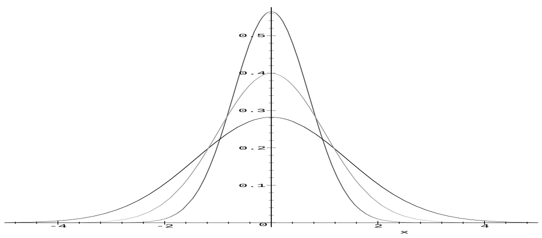
Notes de cours 2 :
Equation de la chaleur et mouvement brownien

Soit (B_t) un mouvement brownien. Par définition, la loi de B_t est $\mathcal{N}(0, \sqrt{t})$. Donc on a, pour tout $t > 0$,

$$\mathbb{E}(B_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} y e^{-\frac{y^2}{2t}} dy = \int_{\mathbb{R}} y g(t, y) dy$$

où $g(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}$ est la *densité gaussienne.* On notera que cette fonction $g(t, x)$ satisfait l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$



Proposition 1 *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue bornée et si $u(t, x) := \mathbb{E} f(x + B_t)$ alors, pour $t > 0$, $u(t, x)$ est $\mathcal{C}^\infty$, vérifie l'équation (1) et on a $u(0, x) = f(x)$.*

Proposition 2 *Si $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction $\mathcal{C}^1_b$ en t et $\mathcal{C}^2_b$ en x, alors on a :*

$$\mathbb{E} f(t, x + B_t) = f(0, x) + \int_0^t \mathbb{E} \left(\frac{\partial f}{\partial t}(s, x + B_s) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, x + B_s) \right) ds.$$

Brownien avec dérive : Soit (B_t) un mouvement brownien et μ et σ deux réels. Le processus

$$X_t := \mu t + \sigma B_t$$

est appelé *mouvement brownien avec dérive* (*de paramètres μ et σ*). On vérifie que $\mathbb{E}(X_t) = \mu t$ et $Var(X_t) = \sigma^2 t$. On peut généraliser à X_t les deux propositions précédentes, à condition de remplacer l'équation de la chaleur (1) par l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial u}{\partial x} \tag{2}$$

Cas discret :

Soit $t \in \{0, \delta t, \ldots, N\delta t = T\}$. La *marche de Wiener* (W_t) est le processus défini par $W_0 = 0$ et, pour tout $t \geq \delta t$, $W_t = W_{t-\delta t} + \varepsilon_t \sqrt{\delta t}$, où ε_t est une v.a. de Bernouilli telle que $P(\varepsilon_t = 1) = P(\varepsilon_t = -1) = \frac{1}{2}$. On pose $\delta x = 2\sqrt{\delta t}$. On a :

$$u(t, x) = \frac{1}{4} u(t + 2\delta t, x + \delta x) + \frac{1}{2} u(t + 2\delta t, x) + \frac{1}{4} u(t + 2\delta t, x - \delta x)$$

d'où

$$\frac{u(t, x) - u(t + 2\delta t, x)}{2\delta t} = \frac{1}{2} \frac{u(t + 2\delta t, x + \delta x) - 2u(t + 2\delta t, x) + u(t + 2\delta t, x - \delta x)}{(\delta x)^2}.$$

Exercices :

1. Montrer que si u_1 et u_2 sont solutions de

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & = & \frac{\partial u}{\partial s} \\ u(0,x) & = & u_0(x) \end{array} \right. \tag{3}$$

alors $v := u_1 - u_2$ est solution de

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} & = & \frac{\partial v}{\partial s} \\ v(0,x) & = & 0 \end{array} \right. \tag{4}$$

. Soit $E(t) := \int_{x=-\infty}^{+\infty} v^2(t,x)dx$. Montrer que $E(t) \geq 0$, $E(0) = 0$, et $\frac{dE}{dt}(t) \leq 0$ pour tout t (indication : intégrer par parties) En déduire que (3) admet au plus une solution.

2. Soient a et $b > 0$ deux constantes. On considère l'équation aux dérivées partielles suivantes

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial u}{\partial t} & = & a\dfrac{\partial u}{\partial x} + b\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,x) & = & x \end{array} \right. \tag{5}$$

Exprimer la solution de l'équation aux dérivées partielles (5) en utilisant le MB B_t, puis calculer cette solution explicitement. Mêmes questions pour $u(0,x) = e^x$.