Université de Nice
Département de Mathématiques[1] Maîtrise MASS

Notes de cours 3 :
Mouvement brownien géométrique et EDP de Black-Scholes

Dans sa thèse, soutenue en 1900, L. Bachelier avait proposé de modéliser les actifs financiers au moyen du mouvement brownien avec dérive. Depuis Samuelson (1967), on préfère utiliser des processus appelés browniens géométriques.

Mouvement Brownien géométrique :

Définition : Un processus (Y_t) est un *mouvement Brownien géométrique* (de paramètres μ et σ) si le processus $\ln Y_t$ est un processus brownien avec dérive, plus précisément si l'on a $Y_0 = 1$ et

$$\ln Y_t = (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t \text{ ou } Y_t = \exp((\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t).$$

Proposition 1 *Si Y_t est un brownien géométrique de paramètres μ et σ, les deux premiers moments de la v.a. Y_t sont*

$$\mathbb{E}(Y_t) = e^{\mu t} \quad et \quad \mathbb{E}(Y_t^2) = e^{(2\mu+\sigma^2)t}.$$

Théorème 2 *Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue bornée, la fonction $v(t,x) = \mathbb{E}f(yY_t)$, où Y_t est un brownien géométrique de paramètre μ et σ, est solution de l'équation aux dérivées partielles*

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{2}\sigma^2 y^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \mu y \frac{\partial v}{\partial y}$$

et vérifie la condition initiale $v(0,y) = f(y)$.

L'équation aux dérivées partielles de Black-Scholes :

Dans le modèle de Black-Scholes du prix d'une option européenne standard, on modélise l'actif sous-jacent par un processus brownien géométrique S_t de paramètre $(r - \frac{\sigma^2}{2})$ et σ, où r désigne le taux sans risque (on a alors pour tout $t > 0$, $\mathbb{E}\tilde{S}_t = S_0$, où $\tilde{S}_t = S_t/e^{rt}$). On suppose que le prix de l'option considérée, par exemple un call de date d'échéance T et de prix d'exercice K, est une fonction régulière de la maturité τ et de la valeur y de l'actif sous-jacent (la maturité est le temps séparant la date présente (où l'actif sous-jacent vaut y) de la date d'exercice T). On montre alors que ce prix $C(\tau, y)$ est précisemment l'espérance des valeurs actualisées que peut prendre l'option à l'échéance, c'est-à-dire ici les valeurs yS_τ ; donc, pour $f(S) = (S-K)^+$:

$$C(\tau, y) = \mathbb{E}\{f(y\tilde{S}_\tau)\} = \mathbb{E}\{f(e^{-r\tau}yS_\tau)\} = e^{-r\tau}\mathbb{E}\{(yS_\tau - K)^+\}.$$

Si l'on applique le théorème précédent à ce contexte, on obtient :

Corollaire 3 *Lorsque l'actif sous-jacent S_t suit un brownien géométrique de paramètre r et σ, le prix d'un call $C(\tau, y)$ sur $S_t = \exp((r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t)$, de date d'exercice T et de prix d'exercice K, est solution de l'équation aux dérivées partielles de Black-Scholes*

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial \tau} &= \frac{1}{2}\sigma^2 y^2 \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + ry\frac{\partial C}{\partial y} - rC \\ C(0,y) &= (y-K)^+ \end{cases} \tag{1}$$

La formule de Black-Scholes :

La solution explicite de cette équation aux dérivées partielles donne la célèbre *formule de Black-Scholes :*

$$C(\tau, S) = S\mathcal{N}(d_1) - Ke^{-r\tau}\mathcal{N}(d_2) \tag{2}$$

où $d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}(\ln\frac{S}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2})\tau)$, $d_2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}(\ln\frac{S}{K} + (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau)$ et $\mathcal{N}(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d} e^{-\frac{\xi^2}{2}}d\xi$.

Exercices :

1. Montrer que si on pose $\tau = T - t$ et $V(t,y) = C(T-t,y)$, l'équation de Black-Scholes

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{\partial C}{\partial \tau} & = & \frac{1}{2}\sigma^2 y^2 \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + ry\frac{\partial C}{\partial y} - rC \\ C(0,y) & = & \varphi(y) \end{array}\right. \tag{3}$$

équivaut à

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 y^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + ry\frac{\partial V}{\partial y} - rV & = & 0 \\ V(T,y) & = & \varphi(y) \end{array}\right. \tag{4}$$

et que, pour $\varphi(y) = y$, $C(\tau,y) = y$ est solution de (3) – le sous-jacent est solution de l'équation de Black-Scholes.

On pose $y = Ke^x$ et $t = T - \frac{2s}{\sigma^2}$. Montrer que $\frac{ds}{dt} = -\frac{\sigma^2}{2}$; calculer de même $\frac{dx}{dy}$

(b) Calculer $\frac{\partial V}{\partial t}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, et $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ en fonction de $\frac{\partial V}{\partial s}$, $\frac{\partial V}{\partial x}$, et $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$.

(c) On pose $V(t,y) = Kv(s,x)$. Montrer que l'équation (4) équivaut à l'équation

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (r - \frac{\sigma^2}{2})\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial v}{\partial s} - rv & = & 0 \\ v(0,x) & = & v_0(x) \end{array}\right. \tag{5}$$

pour une fonction v_0 que l'on précisera.

(d) On pose $v = e^{\alpha x + \beta s}u$. Montrer que l'équation (5) équivaut à une équation

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\alpha\sigma^2 + r - \frac{\sigma^2}{2})\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial u}{\partial s} + \gamma u & = & 0 \\ u(0,x) & = & u_0(x) \end{array}\right. \tag{6}$$

pour une constante γ et une fonction u_0 que l'on précisera.

(e) Montrer comment choisir α et β pour que l'équation (6) se réduise à l'équation de diffusion

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & = & \frac{\partial u}{\partial s} \\ u(0,x) & = & u_0(x) \end{array}\right. \tag{7}$$

réponses : $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y}$, car $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$ et $\frac{dy}{dx} = Ke^x = y$; $\frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial V}{\partial s}$; $\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{1}{y}\frac{\partial V}{\partial x}$; $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -\frac{1}{y^2}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{y^2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ (car $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial V}{\partial x}) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial V}{\partial x})\frac{dx}{dy} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\frac{1}{y}$) ; $\gamma = \frac{\sigma^2}{2}\alpha^2 + (r - \frac{\sigma^2}{2})\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\beta - r$.

2. On rappelle que la fonction $u(t,x) := \mathbb{E}f(x + B_t)$ (où f est une fonction à croissance modérée (par exemple bornée), et $B := (B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien) est solution de l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{8}$$

(a) Revoir la preuve du résultat ci-dessus et en dégager les principales étapes.

(b) Réutiliser ces étapes pour montrer que si on pose

$$v(t,x) := \mathbb{E}f(x + Y_t) \text{ avec } Y_t = \mu t + \sigma B_t$$

la fonction v est solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{9}$$

On pourra poser $g(t,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}\sigma}e^{-\frac{(y-\mu t)^2}{2\sigma^2 t}}$.

(c) Retrouver ce résultat en montrant que $v(t,x) = u(s,y)$, où on a posé $y = x + \mu t$ et $s = \sigma^2 t$.

3. Soit $f(S) = (S-K)^+$ la fonction de paiement d'une option call de prix d'exercice K. Soit r le taux d'intérêt. On pose $\tau := T - t$. On rappelle que si $S_t = y$, la valeur d'une option call d'échéance T et de prix d'exercice K est donnée par

$$C(\tau,y) = e^{-r\tau}\mathbb{E}[f(S_T) \mid S_t = y].$$

On suppose que S_t est donné par

$$S_t = \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma B_t\right),$$

où σ désigne la *volatilité* du marché, supposée constante, strictement positive.

(a) Montrer que $C(\tau, y) = e^{-r\tau}\mathbb{E}\{(yS_\tau - K)^+\}$.

(b) Montrer la *formule de Black-Scholes :*

$$C(\tau, S) = S\mathcal{N}(d_1) - Ke^{-r\tau}\mathcal{N}(d_2) \tag{10}$$

où

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left(\ln\frac{S}{K} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau\right),$$

$$d_2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left(\ln\frac{S}{K} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau\right), \text{ et}$$

$$\mathcal{N}(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d} e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi.$$

4. Soit $v(t, x)$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ solution de l'équation de la chaleur.

(a) Indiquer l'équation aux dérivées partielles que satisfait la fonction $u(t, x) := e^{\rho t}v(t, x)$. Les fonctions g et h ci-dessous sont supposées de classe C_b^2.

(b) Montrer que la solution du problème

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{\partial u}{\partial t} & = & \rho u + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0, x) & = & g(x) \end{array}\right. \tag{11}$$

peut s'écrire, pour tout $t > 0$,

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{\rho t}\int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\exp(\frac{(x-y)^2}{2t})dy.$$

(c) Ecrire la solution du problème

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{\partial u}{\partial t} & = & \rho u + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0, x) & = & h(x) \end{array}\right. \tag{12}$$

comme l'espérance d'un processus qu'on précisera.