Université de Nice
Département de Mathématiques[1]

Année 1999-2000
Maîtrise MASS

Notes de cours 4 :
Portefeuille et integrale de Wiener

Portefeuille et stratégie de gestion

Considérons deux actifs, le premier non risqué (argent déposé sur un compte rapportant un intérêt de $r\%$), noté S_t^0 et le second risqué (une action par exemple). La dynamique du premier est déterministe (par exemple donnée par $dS_t^0 = S_t^0 r dt,\ \ S_0^0 = 1$) et celle du second stochastique (par exemple un mouvement brownien $S_t = B_t$ ou un autre processus stochastique). La valeur d'un portefeuille composé de ces deux actifs S_t^0 et S_t en quantité h_t^0 et h_t respectivement est simplement $\Pi_t = h_t^0 S_t^0 + h_t S_t$. Lorsque h_t^0 est positif, le portefeuille est créditeur dans l'actif S_t^0, lorsque h_t^0 est négatif il est débiteur et de même pour le second actif. Si l'on désigne par H_t le vecteur $H_t = (h_t^0, h_t)$, la succession des compositions H_t pour tout $t \geq 0$ s'appelle une *stratégie*. Elle est *déterministe* lorsque H_t ne dépend que du temps t et ne dépend pas de l'état du monde ω, et *stochastique* si elle dépend aussi de ω.

Définition : Supposons $t \in \mathbb{T} := \{0, \delta t, 2\delta t, \ldots, T = n\delta t\}$. Une stratégie $(H_t, t \in \mathbb{T})$ est dite *autofinancée* si, pour tout $t \in \mathbb{T}$

$$h_t^0 S_t^0 + h_t S_t = h_{t+\delta t}^0 S_t^0 + h_{t+\delta t} S_t.$$

A la date t, le détenteur du portefeuille Π_t peut le réajuster en modifiant sa composition (la nouvelle composition, qui sera celle de la date suivante étant notée $(h_{t+\delta t}^0, h_{t+\delta t})$), mais il doit le faire sans apports ni retraits de fond.

La valeur à l'instant $T = n\delta t$ d'un portefeuille géré selon une stratégie autofinancée est la somme cumulée des gains ou des pertes (profit and loss) et prend donc la forme suivante :

$$\Pi_T = \Pi_0 + \sum_{t=0}^{t=(n-1)\delta t} \left(h_{t+\delta t}^0 (S_{t+\delta t}^0 - S_t^0) + h_{t+\delta t}(S_{t+\delta t} - S_t) \right)$$

Si le premier terme $\sum h_{t+\delta t}^0 (S_{t+\delta t}^0 - S_t^0)$ est simplement une fonction de t, par contre le second terme $\sum h_{t+\delta t}(S_{t+\delta t} - S_t)$ est une v.a. dont la définition n'est pas immédiate puisque, pour chaque ω, elle s'apparente à la variation totale le long d'une trajectoire du processus S_t et on a vu que, pour B_t par exemple, cette variation est presque surement infinie. L'intégrale de Wiener permet de donner un sens à cette somme. Lorsque la stratégie de gestion H_t ne sera plus déterministe mais stochastique (par exemple dans le cas du portefeuille de couverture d'une option), il conviendra de généraliser l'intégrale qui devient une *intégrale stochastique* ou *intégrale d'Itô.*

Intégrale de Wiener

On désigne par $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^+)$ l'ensemble des fonctions $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de carré intégrable muni du produit scalaire $< h, g >= \int_{\mathbb{R}^+} h(t)g(t)dt$. On désigne par $\mathbb{L}^2(\Omega)$ l'ensemble des v.a. de carré intégrable, c'est-à-dire telles que $\mathbb{E}(X^2) < \infty$. Une v.a. gaussienne, c'est-à-dire de loi $\mathcal{N}(m, \sigma)$, est un exemple d'élément de $\mathbb{L}^2(\Omega)$.

Définition : Soit B_t un mouvement brownien. A toute fonction $h \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^+)$, on peut associer une v.a. gaussienne $\Pi(h)$, appelée *intégrale de Wiener* de h et notée $\Pi(h) = \int h(t)dB_t$, telle que

1. Pour $h(t) = \mathbb{I}_{\{s<t<s'\}}(t)$, $\Pi(h) = B_{s'} - B_s$.
2. L'application de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^+)$ dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$ qui à h associe $\Pi(h)$ est linéaire et isométrique, i.e.

$$< \Pi(h), \Pi(g) >= \mathbb{E}(\Pi(h)\Pi(g)) = \int_{\mathbb{R}^+} h(t)g(t)dt =< h, g >$$

3. Si $h \in C_b^1$ (dérivable, à dérivée bornée), alors $\Pi(h)$ est limite dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$ des sommes partielles $\sum h(t)(B_{t+\delta t} - B_t)$ lorsque $\delta t \to 0$.

Comme pour les intégrales déterministes, on peut aussi considérer l'intégrale de Wiener comme fonction de sa borne supérieure ; elle devient dans ce cas elle même un processus stochastique :

Définition : On note $\Pi_t(h)$ ou $\int_0^t h(s)dB_s$ le processus stochastique défini par

$$\int_0^t h(s)dB_s := \Pi(h\mathbb{I}_{]0,t]}).$$

et la relation intégrale $\Pi_t = \int_0^t h(s)dB_s$ peut également se noter de façon différentielle sous la forme $d\Pi_t = h_t dB_t$.

Formule d'intégration par partie

Soit h une fonction dérivable, à dérivée bornée sur $[0,t]$. On a pour tout $t \geq 0$

$$\int_0^t h'(s)B_s ds + \int_0^t h(s)dB_s = h(t)B_t.$$

Notons que si l'on introduit l'écriture $d\Pi_t = h(t)dB_t$ comme une notation pour $\Pi_t = \int_0^t h(s)dB_s$, cette formule s'écrit encore $d(hB_t) = h'B_t + hdB_t$.

Corollaire 1 *Pour toute fonction $h \in C_b^1$, l'intégrale de Wiener $\int_0^t h(s)dB_s$ est un processus à trajectoires continues et on a :* $\mathbb{E}(\int_0^t h(s)dB_s) = 0$ *et* $Var(\int_0^t h(s)dB_s) = \int_0^t h^2(s)ds$.

Processus stochastique	E.D.S.	Eq. aux Dérivées Partielles	solution de l'E.D.P
B_t Brownien		$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,x) = f(x) \end{cases}$ Equation de la chaleur	$u(t,x) = \mathbb{E}f(x+B_t)$
$X_t = \mu t + \sigma B_t$ Brownien avec dérive	$\begin{cases} dX_t = \mu dt + \sigma dB_t \\ X_0 = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial u}{\partial x} \\ u(0,x) = f(x) \end{cases}$	$u(t,x) = \mathbb{E}f(x+X_t)$
$Y_t = \exp((\mu - \sigma^2/2)t + \sigma B_t)$ Brownien géométrique	$\begin{cases} dY_t = Y_t(\mu dt + \sigma dB_t) \\ Y_0 = 1 \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{2}\sigma^2 y^2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \mu y\frac{\partial v}{\partial y} \\ v(0,y) = f(y) \end{cases}$	$v(t,y) = \mathbb{E}f(yY_t)$
$S_t = S_0\exp((r - \sigma^2/2)t + \sigma B_t)$ Modèle de Black-Scholes	$\begin{cases} dS_t = S_t(rdt + \sigma dB_t) \\ S_0 \text{ donné} \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{1}{2}\sigma^2 y^2\frac{\partial^2 C}{\partial y^2} - ry\frac{\partial C}{\partial y} + rC \\ C(T,y) = \varphi(y) \end{cases}$ Equation de Black-Scholes	$C(t,y) = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}\varphi(y\frac{S_T}{S_0})$
$V_t = V_0e^{-at} + \sigma\int_0^t e^{-a(t-s)}dB_s$ Ornstein-Uhlenbeck	$\begin{cases} dV_t + aV_t dt = +\sigma dB_t \\ V_0 = x \end{cases}$ Equation de Langevin	$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{2}\sigma^2 y^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - ax\frac{\partial v}{\partial x} \\ v(0,x) = f(x) \end{cases}$	$\begin{cases} v(t,x) = \mathbb{E}f(V_t) \\ (x := V_0) \end{cases}$

Figure 1: Ce tableau résume les liens qui existent entre certains processus stochastiques souvent utilisés dans les modèles financiers et les équations aux dérivées partielles associées. Il montre aussi comment les solutions de ces dernières peuvent s'écrire explicitement au moyen des premiers.

Exercices :

1. Résoudre l'équation différentielle stochastique

$$dX_t = X_t dt + dB_t \tag{1}$$

(Indication : multiplier les deux membres par e^{-t} et comparer avec $d(e^{-t}X_t)$). Plus généralement, résoudre l'équation différentielle stochastique de Langevin

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma dB_t \tag{2}$$

Comment s'appelle cette solution de l'e.d.s.? Calculer $\mathbb{E}\,X_t$ et $\mathrm{Var}\,X_t := \mathbb{E}\,(X_t - \mathbb{E}\,X_t)^2$.