Université de Nice
Département de Mathématiques[1] Maîtrise MASS

Notes de cours 5 :
Processus d'Ornstein-Uhlenbeck et modèle de Vasiček

Equation de Langevin : On appelle *équation de Langevin* l'équation différentielle stochastique

$$dV_t + aV_t dt = \sigma dB_t.$$

Théorème 1 *L'équation de Langevin $dV_t + aV_t dt = \sigma dB_t$ possède, pour toute condition initiale V_0 donnée, une solution unique appelé* processus d'Ornstein-Uhlenbeck *donnée par $V_t = V_0 e^{-at} + \sigma \int_0^t e^{-a(t-s)} dB_s$.*

Corollaire 2 *Si la variable aléatoire V_0 est gaussienne et indépendante de (B_t), la solution V_t de l'équation de Langevin $dV_t + aV_t dt = \sigma dB_t$ est gaussienne et on a $\mathbb{E}(V_t) = \mathbb{E}(V_0)e^{-at}$ et $Var(V_t) = Var(V_0)e^{-2at} + \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at})$. En particulier si V_0 est centrée de variance $Var(V_0) = \frac{\sigma^2}{2a}$, alors V_t est un* processus stationnaire *($Var V_t = \frac{\sigma^2}{2a}$) et, quelque soit V_0, quand $t \to \infty$, le processus V_t vérifie $\mathbb{E}(V_t) \to 0$ et $Var(V_t) \to \frac{\sigma^2}{2a}$.*

Théorème 3 *Pour toute fonction $f \in C_b^1$, la fonction $v(t,x) := \mathbb{E}f(V_t)$ où V_t est le processus d'O.U. associé à l'équation $dV_t + aV_t dt = \sigma dB_t$ tel que $V_0 = x$, est solution de l'EDP :*

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t}(t,x) = \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t,x) - ax\frac{\partial v}{\partial x}(t,x) \\ v(0,x) = f(x) \end{cases} \tag{1}$$

Le modèle de taux de Vasiˇcek : Dans la théorie de Black-Scholes, on fait l'hypothèse que le taux d'intérêt courant est sans risque et même constant. Cette simplification ne peut plus être faite lorsqu'on s'interesse à des produits dérivés sur les taux ; on utilise alors des modèles stochastiques des taux dont les plus conuus sont Vasiček (1977), Ho et Lee (1986) ou Heath, Jarrow et Morton (1992).

Dans le modèle de taux de Vasiček, on suppose que le *taux d'intérêt court terme* (ou taux court) r_t est un processus d'O.U. solution de l'équation $dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dB_t$. Si $\sigma = 0$, la dynamique est déterministe et on voit que b représente le *taux long terme* vers lequel tend le taux r_t avec un coefficient de rappel a dont l'inverse s'appelle le *temps de relaxation*. Le paramètre σ modélise l'intensité des fluctuations. D'après ce qui précède, la solution r_t est donnée par $r_t = r_0 e^{-at} + b(1 - e^{-at}) - \sigma \int_0^t e^{-a(t-s)} dB_s$.

Définition : On appelle *zéro coupon* (discount bond) d'échéance T, noté $Z(t,T)$, la valeur à l'instant t d'une obligation versant $1F$ à l'instant T. Lorsque le taux court est déterministe, on a $Z(t,T) = \exp(-\int_t^T r(s)ds)$ et lorsque qu'il est stochastique, on a $Z(t,T) = \mathbb{E}\{\exp(-\int_t^T r(s)ds)/\mathcal{F}_t\}$.

Théorème 4 *Dans le modèle de Vasiček, le prix du zéro coupon d'échéance T est donné par*

$$Z(t,T) = \exp\{-R_\infty(T-t) - (R_\infty - r_t)\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} + \frac{\sigma^2}{4a^3}(1 - e^{-a(T-t)})^2\}$$

où $R_\infty = b - \frac{\sigma^2}{2a^2}$.

Si l'on désigne par $R(t, T-t)$ le *taux actuariel* (forward rate) associé au zéro coupon et qui est défini par la relation $Z(t,T) = \frac{Z(T,T)}{e^{R(T-t)}} = e^{-R(T-t)}$, le théorème précédent fournit également une expression pour calculer ce taux actuariel en fonction de la maturité $\tau = T - t$:

$$R(t,\tau) = R_\infty - (R_\infty - r_t)\frac{1 - e^{-a\tau}}{a\tau} + \frac{\sigma^2}{4a^3\tau}(1 - e^{-a\tau})^2$$

avec $R(t,\infty) = R_\infty$ pour tout t.

Exercices :

1. Soit (X_t) le processus d'Ornstein-Uhlenbeck solution de l'équation de Langevin

$$dX_t + aX_t dt = \sigma dB_t \quad , \quad X_0 = x \in \mathbb{R}.$$

Les X_t sont des v.a. gaussiennes, avec

$$X_t = e^{-at}x + \sigma e^{-at} \int_0^t e^{as} dB_s.$$

On a $X_t \in \mathcal{N}(\mu_t, \sigma_t^2)$ avec $\mu_t = xe^{-at}$ et $\sigma_t^2 = \frac{\sigma^2}{2\mu}(e^{-2at} - 1)$.

On pose $S_t := \int_0^t X_s ds$. On rappelle que S_t est limite (sur n) des sommes de Riemann

$$S_t^{(n)} := \sum_{k=0}^{n-1} X_{t_k} \delta t_k \text{ , où } \quad t_0 = 0 \quad , \quad t_{k+1} = t_k + \delta t \quad , \quad \delta t := \delta t^{(n)} = \frac{t}{n} \quad ;$$

S_t est une v.a. gaussienne ; on a calculé $\mathbb{E}\, S_t = \lim_n \mathbb{E} \sum_{k=0}^{n-1} X_{t_k} \delta t^{(n)} = \frac{x}{a}(1 - e^{-at})$.
On veut calculer $\mathrm{Var}\, S_t := \mathrm{Cov}\,(S_t, S_t)$. Pour cela, soit tout d'abord

$$E(u,v) := \mathbb{E}\left(\int_0^u e^{as} dB_s \int_0^v e^{at} dB_t \right).$$

Montrer que $E(u,v) = \int_0^{u \wedge v} e^{2as} ds$, où $u \wedge v := \mathrm{Min}\,\{u, v\}$, et calculer $E(u,v)$. Montrer que $\mathrm{Cov}\,(X_u, X_v) = e^{-a(u+v)}(x^2 + \sigma^2 E(u,v)) = e^{-a(u+v)}(x^2 + \frac{\sigma^2}{2a}(e^{2(u \wedge v)} - 1))$. Montrer que $\mathrm{Var} \int_0^t X_s ds := \mathrm{Cov}\,(\int_0^t X_u du, \int_0^t X_v dv) = \int_0^t \int_0^t \mathrm{Cov}\,(X_u, X_v) du dv$. Calculer $\mathrm{Var}\, S_t$.