Université de Nice
Département de Mathématiques[1] Maîtrise MASS

Notes de cours 6 :
Formule d'Itô et intégrale stochastique

Introduction : La formule étudiée précédemment (proposition 2 du cours 2) traduit l'égalité entre espérance de deux processus. Ces deux processus n'ont pas de raison d'être égaux trajectoire par trajectoire. Nous verrons que le processus différence (qui est d'espérance nulle) peut s'écrire $\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s,B_s)dB_s$ et est un exemple d'intégrale stochastique. On peut vérifier que, dans le cas où $f(t,x) = h(t)x$ est linéaire en x, ce processus différence n'est autre que l'intégrale de Wiener $\int_0^t h(s)dB_s$.

Formule d'Itô :

Théorème 1 *Si $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction $\mathcal{C}_b^1$ en t et $\mathcal{C}_b^2$ en x, alors pour tout t on a p.s. :*

$$f(t,B_t) = f(0,0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s,B_s)ds + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s,B_s)ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s,B_s)dB_s.$$

Le terme $\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s,B_s)dB_s$ est l'*intégrale stochastique* (ou *l'intégrale d'Itô*) du processus $\frac{\partial f}{\partial x}(t,B_s)$ par rapport au mouvement brownien.Quelques définitions vont être nécessaires avant d'établir son existence.

Filtration et adaptation :

Définition : Une *filtration* est une famille croissante $(\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{R}^+)$ de sous tribus, continue à droite au sens où $\mathcal{F}_t = \bigcap_{\varepsilon>0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon}$. On peut associer à tout processus X_t une filtration dite *filtration naturelle de ce processus*, définie par $\mathcal{F}_t^X = \bigcap_{\varepsilon>0} \sigma(X_s, s \leq t+\varepsilon)$, où $\sigma(X)$ désigne la tribu engendrée par la variable aléatoire X. En particulier on désignera par $\mathcal{F}_t^B$ la filtration naturelle du mouvement brownien (B_t).

Définition : Soit $(\mathcal{F}_t)$ une filtration et X_t un processus. On dit que X_t est *adapté à* la filtration $(\mathcal{F}_t)$ si, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, X_t est $\mathcal{F}_t$−mesurable.

Définition : On appelle $\mathbb{H}^2(\Omega \times \mathbb{R}^+)$ l'ensemble des processus X_t adaptés à $\mathcal{F}_t$ et de carré intégrable (i.e. $\mathbb{E}\int X^2(t,.)dt < \infty$). Cet ensemble est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $< X_t, Y_t >= \mathbb{E}\int X_t Y_t dt$.

Exemple de processus adaptés à $\mathcal{F}_t$: les processus de la forme $f(t,B_t)$; les intégrales de la forme $\int f(t,B_t)dt$; les processus $\varphi(t,\omega) = \sum_0^{n-1} X_i(\omega)\mathbb{I}_{]t_i,t_{i+1}]}(t)$, appelés *processus en escalier*, où $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ est une subdivision et $(X_i)_{i=0..n}$ une famille de v.a $\mathcal{F}_{t_i}^B$-mesurables et de carré intégrable.

Proposition 2 *Tout processus $X_t \in \mathbb{H}^2(\Omega \times \mathbb{R}^+)$ est limite d'une suite de processus stochastiques en escalier (i.e. l'ensemble des processus en escalier est dense dans $\mathbb{H}^2(\Omega \times \mathbb{R}^+)$).*

Théorème 3 *Soit B_t un mouvement brownien et $(\mathcal{F}_t^B)$ sa filtration naturelle. A tout processus $X_t \in \mathbb{H}^2(\Omega\times\mathbb{R}^+)$, on associe une v.a. de carré intégrable $I(X_t)$, notée $I(X_t) = \int X_t dB_t$, telle que $\mathbb{E}(I(X_t)) = 0$ et $\mathbb{E}(I(X_t))^2 = \mathbb{E}(\int X_t^2 dt)$.*

Le processus $I(X_t)$ est appelé *l'intégrale stochastique* ou *intégrale d'Itô*. Comme d'habitude on peut définir également cette intégrale comme fonction de sa borne supérieure par $\int_0^t X_t dB_t := \int X_t \mathbb{I}_{]0,t]} dB_t$.

Propriétés de l'intégrale d'Itô :

1. $\int_t^{t'} X_t dB_t =^{ps} \int_t^s X_t dB_t + \int_s^{t'} X_t dB_t$ (relation de Chasles)
2. $\int_t^{t'} (\alpha X_t + Y_t)dB_t =^{ps} \alpha \int_t^{t'} X_t dB_t + \int_t^{t'} Y_t dB_t$.
3. $\mathbb{E}\left(\int_t^{t'} X_t dB_t\right) = 0$.
4. $\int_t^{t'} X_t dB_t$ est une v.a. $\mathcal{F}_{t'}^B$−mesurable.
5. $\int_0^t X_t dB_t$ est une martingale[2].

[2]voir le cours suivant

Exercices :

1. Résoudre l'équation différentielle stochastique de Langevin (indication : adapter la méthode vue à la question précédente)
$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma dB_t \tag{1}$$
Comment s'appelle cette solution de l'e.d.s.? Calculer $\mathbb{E}\, X_t$ et $\mathrm{Var}\, X_t := \mathbb{E}\,(X_t - \mathbb{E}\, X_t)^2$ dans le cas où $X_0 =: x_0$ est déterministe. On utilisera les propriétés vues en cours sur l'espérance et la variance de l'intégrale de Wiener. Calculer $\mathbb{E}\, X_t$ et $\mathrm{Var}\, X_t$ dans le cas où X_0 est une v.a. gaussienne et indépendante des B_s. On admettra que dans ce cas X_0 est également indépendante de $\int_0^t e^{-s} dB_s$. En déduire que si X_0 est normale centrée, de variance $\mathrm{Var}\,(X_0) = \frac{\sigma^2}{-2\mu}$, alors X_t est un *processus stationnaire* (vérifier que $\mathbb{E}_t$ = Cste et $\mathrm{Var}\, X_t$ = Cste, puis expliquer pourquoi ceci implique la stationarité) et, quelque soit X_0, quand $t \to +\infty$, si $\mu < 0$, le processus X_t vérifie $\mathbb{E}(X_t) \to 0$ et $\mathrm{Var}\,(X_t) \to \frac{\sigma^2}{-2\mu}$. Réponses : $X_t = e^{\mu t} X_0 + \sigma e^{\mu t} \int_0^t e^{-\mu s} dB_s$; $\mathbb{E}\, X_t = x_0 e^{\mu t}$; $\mathrm{Var}\, X_t = \frac{\sigma^2}{2\mu}(e^{2\mu t} - 1)$; (X_t) est un processus d'Ornstein-Uhlenbeck ; $\mathbb{E}\, X_t = e^{\mu t} \mathbb{E}\, X_0$; $\mathrm{Var}\, X_t = e^{2\mu t} \mathrm{Var}\, X_0 + \frac{\sigma^2}{2\mu}(e^{2\mu t} - 1)$.

2. On dit qu'un processus $(X_t)_{t \in [0,T]}$ est *continu en moyenne quadratique* si et seulement si $\mathbb{E}[X_t^2] < \infty$ pour tout t et
$$\text{pour tout } t \text{ dans } [0,T],\ \lim_{s \longrightarrow t} \mathbb{E}(X_s - X_t)^2 = 0$$
ce qui équivaut, si $(X_t)_{t \in [0,T]}$ est standard,
$$\text{pour tous } s \text{ et } t \text{ dans } [0,T], \text{ si } s \simeq t, \text{ alors } \mathbb{E}(X_s - X_t)^2 \simeq 0.$$
Soit $n \geq 1$ entier quelconque. On pose $\delta t := \delta t^{(n)} = \frac{T}{n}$, et on considère le découpage $[0..T] := [0..T]_{\delta t^{(n)}} := \{0, \delta t, \dots, n\delta t = T\}$ de pas δt de $[0,T]$. On considère un processus $(X_t)_{t \in [0,T]} \in H^2(\Omega \times [0,T])$ de manière à ce que l'intégrale d'Itô $\int_0^T X_s dB_s$ soit définie. On considère le processus en escalier $\varphi (= \varphi^{(n)})$ défini, pour tout $(\omega, s) \in \Omega \times [0,T]$, par
$$\varphi_s(\omega) := \sum_{t \in [0..T[} X_t(\omega) \mathbb{I}_{[t, t+\delta t[}(s),$$
où $\mathbb{I}_{[t,t+\delta t[}$ désigne la fonction indicatrice, $\mathbb{I}_{[t,t+\delta t[}(s) = 1$ si $s \in [t, t+\delta t[$ et vaut zéro sinon.
   (a) En utilisant que φ est en escalier, exprimer $\int_0^T \varphi_s dB_s$ comme une somme finie faisant intervenir les accroisements $\delta B_{t+\delta t} := B_{t+\delta t} - B_t$ du brownien.
   (b) Montrer que $\mathbb{E}\left(\int_0^T X_s dB_s - \int_0^T \varphi_s dB_s\right)^2 = \mathbb{E} \int_0^T (X_s - \varphi_s)^2 ds$.
   (c) Montrer que $\mathbb{E} \int_0^T (X_s - \varphi_s)^2 ds = \sum_{t \in [0..T[} \int_t^{t+\delta t} \mathbb{E}(X_s - X_t)^2 ds$.
   (d) On suppose que $(X_t)_{t \in [0,T]}$ est continu en moyenne quadratique. Montrer que l'intégrale d'Itô $\int_0^T X_s dB_s$ est la limite, dans $L^2(\Omega)$, des $\sum_{t \in [0..T[_{\delta t^{(n)}}} X_t \delta B_{t+\delta t^{(n)}}$, c'est-à-dire que
$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{E}\left(\int_0^T X_s dB_s - \sum_{t \in [0..T[_{\delta t^{(n)}}} X_t \delta B_{t+\delta t^{(n)}}\right)^2 = 0,$$
ou encore, si on suppose $(X_t)_{t \in [0,T]}$ standard et n i-grand,
$$\mathbb{E}\left(\int_0^T X_s dB_s - \sum_{t \in [0..T[_{\delta t^{(n)}}} X_t \delta B_{t+\delta t^{(n)}}\right)^2 \simeq 0.$$

3. On considère l'équation différentielle stochastique
$$dX_t = X_t(\sigma dB_t + \mu(t) dt) \text{ avec } X_0 = x_0 \tag{2}$$
où σ et x_0 sont des constantes, et μ est une fonction continue. On suppose $\mu(t) = \sin(t)$; déterminer une fonction g telle que $X_t := x_0 e^{\sigma B_t + g(t)}$ soit solution de (2) ; écrire la solution trouvée. Mêmes questions dans le cas où μ est une fonction continue bornée quelconque.

4. Calculer l'intégrale d'Itô $\int_0^t B_s^2 dB_s$ (Indication : calculer $d\left(\frac{1}{3}B_t^3\right)$).

5. Soient $(h_t)_{t\geq 0}$ et $(k_t)_{t\geq 0}$ deux processus adaptés au brownien $(B_t)_{t\geq 0}$, de carré intégrable (c'est-à-dire dans $H^2(\Omega,\mathbb{R})$). Montrer que

$$\mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} h_s dB_s \int_0^{+\infty} k_s dB_s\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} h_s k_s ds\right].$$

(Indication : Considérer les deux formes bilinéaires $< h, k >:= \mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} h_s dB_s \int_0^{+\infty} k_s dB_s\right]$ et $(h,k) := \mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} h_s k_s ds\right]$: montrer que $< f, f >= (f,f)$ en vertu de l'isométrie I d'Itô

$$\mathbb{E}\left(\int f_t dB_t\right)^2 =: \left\|\int f_t dB_t\right\|_{L^2(\Omega)} =: \|I[f]\|_{L^2(\Omega)} = \|f\|_{H^2(\Omega,\mathbb{R})} := \mathbb{E}\left[\int f_t^2 dt\right],$$

pour tout processus $f := (f_t)_{t\geq 0}$ de carré intégrable, et développer l'identité $< h+k, h+k >= (h+k, h+k)$).

6. On considère un processus stochastique $(X_t)_{t\geq 0}$, nul en $t = 0$, qui vérifie la formule suivante : pour toute $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, et pour tout $t > 0$, on a presque surement :

$$f(X_t) - f(X_0) = \int_0^t f'(X_s) dX_s \qquad (3)$$

où encore en notation différentielle $df(X_t) = f'(X_t)dX_t$. On admettra que de tels processus existent.

   (a) Montrer que X_t ne peut pas être un mouvement brownien.

   (b) On considère un marché financier constitué de deux actifs (S_t^0, S_t) définis par $S_t^0 := e^{rt}$ et $S_t := e^{rt+X_t}$, où X_t est un processus vérifiant la formule (3). Calculer dS_t^0 et dS_t.

   (c) Montrer que le portefeuille (h_t^0, h_t) défini par $h_t^0 := 1 - e^{2X_t}$ et $h_t := 2(e^{X_t} - 1)$ fournit une stratégie autofinancée, i.e. $dh_t^0 S_t^0 + dh_t S_t = 0$.

   (d) On désigne par $\Pi_t := h_t^0 S_t^0 + h_t S_t$ la valeur à l'instant t de ce portefeuille. Montrer que l'on a :

$$\Pi_t = e^{rt}(1 - e^{X_t})^2.$$

   (e) Déduire de la question précédente que le marché financier considéré ne vérifie pas l'hypothèse d'abscence d'opportunité d'arbitrage.