Université de Nice
Département de Mathématiques[1] Maîtrise MASS

Notes de cours 7 :
Espérance conditionnelle et martingales

Espérance conditionnelle par rapport à une tribu :

Définition : Soit X une v.a. intégrable définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et $\mathcal{G}$ une sous tribu de $\mathcal{F}$. L'*espérance conditionnelle* de X sachant $\mathcal{G}$ est l'unique v.a. $\mathcal{G}-$mesurable Y telle que

$$\forall A \in \mathcal{G}, \quad \int_A Y dP = \int_A X dP.$$

Cette variable aléatoire espérance conditionnelle est notée $\mathbb{E}(X/\mathcal{G})$ et elle a les propriétés suivantes :

1. Si $\mathcal{G}$ est la tribu grossière, $\mathbb{E}(X/\mathcal{G}) =^{ps} \mathbb{E}(X)$.
2. Si X est $\mathcal{G}-$mesurable, $\mathbb{E}(X/\mathcal{G}) =^{ps} X$.
3. $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X/\mathcal{G})) = \mathbb{E}(X)$.
4. Pour toute variable aléatoire Y $\mathcal{G}-$mesurable et bornée, $\mathbb{E}(YX/\mathcal{G}) =^{ps} Y\mathbb{E}(X/\mathcal{G})$.
5. $\mathbb{E}(\lambda X + \mu Y/\mathcal{G}) =^{ps} \lambda \mathbb{E}(X/\mathcal{G}) + \mu \mathbb{E}(Y/\mathcal{G})$ (linéarité).
6. Si $\mathcal{F}$ est une sous tribu de $\mathcal{G}$ alors $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X/\mathcal{G})/\mathcal{F}) =^{ps} \mathbb{E}(X/\mathcal{F})$
7. Si X est indépendante de $\mathcal{G}$, alors $\mathbb{E}(X/\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X)$.

Remarque : Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé, $(\mathcal{F}_t)$ une filtration sur cet espace et X une v.a. sur Ω. Le processus X_t défini par $X_t = \mathbb{E}(X/\mathcal{F}_t)$ et noté aussi $X_t = \mathbb{E}_t(X)$ est un processus adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)$.

Martingales :

Définition : Un processus (M_t) constitué de v.a. intégrables (i.e. telles que $\mathbb{E}(|M_t|) < +\infty$) est

- une $(\mathcal{F}_t-)$ *martingale* si, pour tout $s \leq t$, on a $\mathbb{E}(M_t/\mathcal{F}_s) = M_s$
- une $(\mathcal{F}_t-)$ *surmartingale* si, pour tout $s \leq t$, on a $\mathbb{E}(M_t/\mathcal{F}_s) \leq M_s$
- une $(\mathcal{F}_t-)$ *sousmartingale* si, pour tout $s \leq t$, on a $\mathbb{E}(M_t/\mathcal{F}_s) \geq M_s$

En particulier, lorsque M_t est une martingale, on a, pour tout t, $\mathbb{E}(M_t) = \mathbb{E}(M_0)$.

Proposition 1 *Si B_t est un mouvement brownien de filtration naturelle $\mathcal{F}_t^B$, alors les processus B_t, $B_t^2 - t$ et $exp(\sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2}t)$ sont des $\mathcal{F}_t^B-$martingales.*

Proposition 2 (Inégalité de Doob) *Pour toute martingale continue M_t, on a l'inégalité suivante :*

$$\mathbb{E}(Sup_{0\leq t\leq T}|M_t|^2) \leq 4\mathbb{E}(|M_T|^2).$$

Proposition 3 *Si h_t est un processus adapté à filtration naturelle $\mathcal{F}_t^B$ du mouvement brownien B_t, alors l'intégrale stochastique $\Pi_t = \int_0^t h_\tau dB_\tau$ est une $\mathcal{F}_t^B-$martingale.*

Théorème 4 (théorème de représentation de martingale) *Soit M_t une martingale de carré intégrable par rapport à la filtration naturelle $\mathcal{F}_t^B$ du mouvement brownien B_t. Il existe un processus adapté h_t de carré intégrable tel que, pour tout t,*

$$M_t =^{ps} M_0 + \int_0^t h_\tau dB_\tau.$$

Exercices :

1. Vérifier qu'un processus (X_t) est une martingale *ssi* pour tout $s < t$, $\mathbb{E}(X_t - X_s/\mathcal{F}_s) = 0$. En déduire qu'un processus brownien avec dérive $X_t = \mu t + \sigma B_t$ est une martingale *ssi* $\mu = 0$.

2. Montrer que si $(X_t)_{0 \le t \le T}$ est un processus alors $Y_s := \mathbb{E}(X_T/\mathcal{F}_s)$ est une martingale.

3. Montrer que si (M_t) est une martingale

$$\mathbb{E}((M_t - M_s)^2/\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(M_t^2 - M_s^2/\mathcal{F}_s).$$

   En déduire que M_t^2 est alors une sous martingale.

4. Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et convexe alors $X_t = f(B_t)$ est une sous martingale.

5. Montrer que $tB_t - 2\int_0^t sB_s ds$ et $B_t^3 - 3tB_t$ sont des martingales.

6. Sachant que $C_t = \mathbb{E}((S_T - K)^+ e^{-r(T-t)}/\mathcal{F}_t)$, que $P_t = \mathbb{E}((K - S_T)^+ e^{-r(T-t)}/\mathcal{F}_t)$ et que $\tilde{S}_t := S_t e^{-rt}$ est une martingale, montrer que, pour tout $t \ge 0$,

$$C_t - P_t = S_t - K e^{-r(T-t)}$$

   appellée *relation de parité Call-Put.*

7. Soit $(A_n)_{n \ge 1}$ une suite d'évènements d'un espace probabilisé Ω. On pose

$$A^* := \lim \operatorname{Sup}{}_n A_n := \bigcap_{m \ge 1} \bigcup_{n \ge m} A_n.$$

   (a) Montrer que $\omega \in A^*$ si et seulement si il existe une (sous-)suite infinie $(A_{n_i})_{i \ge 1}$ telle que $\omega \in A_{n_i}$.

   (b) On suppose que $\sum_{n \ge 1} \Pr(A_n) < \infty$. Monter le *lemme de Borel-Cantelli :*

$$\Pr(\lim \operatorname{Sup}{}_n A_n) = 0.$$

   En d'autres termes, avec une probabilité 1, seul un nombre fini d'évènements A_n se réalisent. **Indication :** montrer que $\Pr(\lim \operatorname{Sup}{}_n A_n) \le \sum_{n \ge m} \Pr(A_n)$.

   (c) Rappeler la preuve de l'*inégalité de Markov-Chebichev-Bienaymé :* si $p \ge 1$, $\lambda > 0$, et $\mathbb{E}\,|X|^p < \infty$,

$$\Pr\{\ |X| \ge \lambda\ \} \le \frac{1}{\lambda^p} \mathbb{E}\,|X|^p.$$

   Indication : exprimer $\mathbb{E}\,|X|^p$ en utilisant la partition $\{\ |X| \ge \lambda\ \} \cup \{\ |X| < \lambda\ \} = \Omega$.

8. Dans cet exercice nous admettrons l'*inégalité de martingale de Doob :* pour toute martingale $(M_t)_{t \in [0,T]}$, $p \ge 1$, si $\mathbb{E}\,|M_T|^p < \infty$, alors, pour $0 \le s \le \tau \le T$,

$$\Pr\{\ \operatorname{Sup}{}_{s \le t \le \tau} |M_t| \ge \lambda\ \} \le \frac{1}{\lambda^p} \mathbb{E}\,|M_\tau|^p.$$

   L'équation différentielle stochastique

$$dY_t = \frac{b - Y_t}{1 - t} dt + dB_t,\ 0 \le t < 1\ ,\ Y_0 = a$$

   a pour solution le processus

$$Y_t = a(1 - t) + bt + (1 - t) \int_0^t \frac{dB_s}{1 - s}$$

Pour s'en assurer, calculer $d(\frac{1}{1-t}Y_t)$. Ce processus est appelé *pont brownien de a à b*. En effet, il est clair que $Y_0 = A$. Par ailleurs $\lim_{t\longrightarrow 1} Y_t = b$ presque-sûrement : pour s'en assurer, il convient demontrer que p.s. $\lim_{t\to 1^-}(1-t)\int_0^t \frac{dB_s}{1-s}$=0, **ce qui est l'objectif de cet exercice**. Pour cela on pose

$$M_t := \int_0^t \frac{dB_s}{1-s} \ , \quad I_n := \left[1-\frac{1}{2^n}, 1-\frac{1}{2^{n+1}}\right] \ , \text{et} \quad A_n(\varepsilon) := \{ \ \mathrm{Sup}_{\,t\in I_n}(1-t)|M_t| \geq \varepsilon \ \}.$$

(a) Calculer $\mathbb{E}\, M_t$ et $\mathbb{E}\, M_t^2$. **Réponse :** $\mathbb{E}\, M_t^2 = \frac{t}{1-t}$

(b) Montrer que $\Pr A_n(\varepsilon) \leq \mathbb{E}\, M_\tau^2/2^{2n}\varepsilon^2$, avec $\tau = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$.

(c) En déduire que $\sum_{n\geq 0} \Pr A_n(\varepsilon) \leq \frac{4}{\varepsilon^2}$ $(< \infty)$.

(d) Montrer que si $\omega \notin \lim \mathrm{Sup}_{\,n} A_n(\varepsilon)$, alors $\exists m(\varepsilon)$ $\forall m \geq m(\varepsilon)$ $\omega \in \left(\bigcup_{n\geq m} A_n(\varepsilon)\right)^c = \bigcap_{n\geq m} (A_n(\varepsilon))^c$.

(e) En déduire que pour tout $m \geq m(\varepsilon)$, $\mathrm{Sup}_{\,t\in[1-\frac{1}{2^m},1[}(1-t)|M_t(\omega)| \leq \varepsilon$, et conclure.