Université de Nice
Département de Mathématiques[1] Maîtrise MASS

Notes de cours 8 :
Retour à l'EDP de Black-Scholes

On a vu précédemment (cours 3) les liens entre la formule fondamentale d'évaluation d'options européennes (le prix de l'option est l'espérance des valeurs actualisée de l'option à l'échéance) et l'équation aux dérivées partielles de Black-Scholes. On va obtenir à présent d'une autre façon cette EDP en utilisant cette fois la formule d'Itô. On mettra aussi évidence, par un calcul simple dans le cas d'un modèle discret, le fait que cette EDP n'est qu'une formulation de la propriété de martingale que possède le processus qui modélise l'option.

Théorème 1 *Si l'on suppose que le prix de l'option est une fonction $V(t,S)$ de classe $\mathcal{C}^1$ en t et de classe $\mathcal{C}^2$ en S, alors elle satisfait l'EDP*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV & = & 0 \\ V(T,S) & = & f(S) \end{array} \right. \tag{1}$$

De plus, le portefeuille de couverture (h_t^0, h_t) est donné par $h_t = \frac{\partial V}{\partial x}(t,S_t)$ et $h_t^0 = (V(t,S_t) - h_t S_t)/S_t^0$.

La preuve utilise la formule d'Itô, la condition d'autofinancement du portefeuille et l'unicité de la décomposition des processus d'Itô.

Remarque : L'existence et l'unicité des solutions de (1) ne sont pas assurées par les hypothèses habituelles d'ellipticité pour l'opérateur $A := \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2}{\partial S^2} + rS\frac{\partial}{\partial S}$. Par contre, on peut se ramener par changement de variables à une équation pour laquelle ces hypothèses sont satisfaites : si on pose $S = Ke^x$, $t = T - \frac{2\tau}{\sigma^2}$ et $KC = V$ on obtient en effet :

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + (\frac{2r}{\sigma^2} - 1)\frac{\partial C}{\partial x} - \frac{2r}{\sigma^2}C.$$

Remarque : Le prix donné par le théorème précedent est celui d'un portefeuille dupliquant l'option (dont le théorème assure en particulier l'existence) ; par contre l'unicité d'un tel portefeuille (et donc du prix de l'option) n'en découle pas ; elle résulte d'un raisonnement d'*absence d'oportunité d'arbitrage.*

Cas Discret : Si l'actif sous-jacent est la marche aléatoire binaire donnée par

$$\left\{ \begin{array}{rcl} S_{t+\delta t} & = & S_t(1 + \mu\delta t \pm \sigma\sqrt{\delta t}) \\ S_0 & = & s_0 \end{array} \right. \tag{2}$$

munie de la probabilité de calcul p qui fait de sa valeur actualisée $(\tilde{S}_t)$ une martingale. On vérifie facilement que cette probabilité p possède l'asymptotique suivante $p = \frac{1}{2} + \frac{r-\mu}{2\sigma}\sqrt{\delta t} + o(\delta t)$. On va retrouver l'EDP à partir de la seule *relation de martingale* pour la marche aléatoire qui modélise le prix actualisé de l'option :

$$\tilde{C}(t,S) = p\tilde{C}(t+\delta t, S(1+\mu\delta t + \sigma\sqrt{\delta t})) + (1-p)\tilde{C}(t+\delta t, S(1+\mu\delta t - \sigma\sqrt{\delta t})). \tag{3}$$

Par la formule de Taylor, on a :

$$\tilde{C}(t+\delta t, S(1+\mu\delta t+\sigma\sqrt{\delta t})) = \tilde{C}(t,S) + \frac{\partial \tilde{C}}{\partial t}(t,S)\delta t + \frac{\partial \tilde{C}}{\partial S}(t,S)(S(\mu\delta t + \sigma\sqrt{\delta t})) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial S^2}(t,S)\sigma^2\delta t S^2 + o(\delta t)$$

En portant cette expression et l'expression analogue dans chaque terme de la somme (3) et en utilisant l'asymptotique de p, on obtient :

$$0 = \delta t\left(\frac{\partial \tilde{C}}{\partial t} + rS\frac{\partial \tilde{C}}{\partial S} + \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial S^2} + \varepsilon(\delta t)\right)$$

d'où l'EDP cherchée, en passant de l'inconnue $\tilde{C}$ à l'inconnue $C = e^{rt}\tilde{C}$ (et en "négligeant" $\varepsilon(\delta t)$).

exercices :

1. On dispose d'un placement rapportant un taux d'intérêt nominal r (non aléatoire). Pour un franc investi à $t = 0$, on dispose donc à la date t d'un montant nominal $Q(t) = e^{rt}$. On veut calculer le rendement réel (par unité de temps) de ce titre, c'est-à-dire la grandeur définie par la relation :

$$R_t = \frac{1}{t} \ln \frac{Q(t)}{P_t}$$

   où P_t désigne un indice de prix, dont la dynamique vérifie $P_0 = 1$ et $dP_t = \mu P_t dt + \sigma P_t dB_t$.

   (a) Calculer $\ln P_t$ puis R_t.

   (b) En déduire que le rendement R_t suit une loi normale dont on précisera l'espérance et l'écart type.

   (c) Commenter la dépendance de ce rendement par rapport à t et par rapport aux divers paramètres μ, σ et r.

2. Soit (B_t) un mouvement brownien et a, b, c et σ des constantes strictement positives. On désigne (r_t) un processus (modèle de taux d'intérêt de Cox, Ingersoll et Ross) solution de l'EDS :

$$dr_t = a(b - cr_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dB_t.$$

   (a) Montrer que la fonction $y(t)$ définie par $y(t) := \mathbb{E}r_t$ vérifie

$$y(t) = r(0) + a\int_0^t (b - cy(\tau))d\tau.$$

   (b) En déduire une équation différentielle satisfaite par $y(t)$, puis la résoudre.

   (c) Montrer que l'espérance du processus $r(t)$ tend, lorsque t tend vers l'infini, vers une constante que l'on précisera. Ceci fournit-t-il une information sur les trajectoires du processus r_t ?

   (d) Montrer que le processus r_t^2 est un processus d'Itô (on précisera α_t et φ_t tel que $d(r_t^2) = \alpha_t dt + \varphi_t dB_t$).

3. Un contrat à terme (ou "future") est un contrat par lequel l'une des parties s'engage à acheter (ou à vendre) à l'autre partie un actif donné (S_t) à une date future fixée T. On suppose que l'actif S_t sur lequel porte le contrat suit un modèle de Black-Scholes usuel, $dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_t)$, et que le taux d'intérêt sans risque est r. On désigne par F_t la valeur à l'instant $t \leq T$ du contrat à terme et par Φ_t la valeur d'une option call de sous-jacent F_t.

   (a) Dans la pratique, beaucoup d'options ont pour sous-jacent non pas un actif financier lui-même mais un contrat à terme sur cet actif car les contrats à terme sont souvent plus liquides et présentent des frais de transaction moindre. Ces deux raisons interessent-elles le vendeur ou l'acheteur de l'option ? Expliquer pourquoi.

   (b) Montrer par un raisonnement d'arbitrage qu'on a $F_t = S_t e^{r(T-t)}$.

   (c) Si l'on suppose que $\Phi = \Phi(t, F_t)$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, montrer qu'elle est alors solution de l'EDP

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial F^2} - r\Phi = 0.$$

   (Indication : On pourra utiliser l'EDP de Back-Scholes dans laquelle on remplace S par F.)