Université de Nice
Département de Mathématiques[1] Maîtrise MASS

Notes de cours 9 :
Processus d'Itô et équations différentielles stochastiques

Définition : On appelle *processus d'Itô* un processus stochastique de la forme

$$X_t = X_0 + \int_0^t \alpha_s ds + \int_0^t \varphi_s dB_s \tag{1}$$

où (B_t) est un mouvement brownien pour $(\Omega, P, \mathcal{F}_t)$, X_0 une v.a. $\mathcal{F}_0-$mesurable et (α_t) et (φ_t) des processus $\mathcal{F}_t-$adaptés vérifiant presque surement $\mathbb{E}(X_0^2) < +\infty$, $\mathbb{E}(\int_0^t |\alpha_s| ds) < +\infty$ et $\mathbb{E}(\int_0^t \varphi_s^2 ds) < +\infty$.

Le terme $\int_0^t \alpha_s ds$ s'appelle la *partie à variation finie* et le terme $\int_0^t \varphi_s dB_s$ est appelé la *partie martingale.* Il y a unicité de la décomposition.

On écrit souvent pour simplifier l'équation (1) sous la forme differentielle $dX_t = \alpha_t dt + \varphi_t dB_t$.

Théorème 1 (Formule d'Itô) *Soit X_t un processus d'Itô défini par (1) et soit $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}_b^1$ en t et $\mathcal{C}_b^2$ en x. Alors le processus Y_t défini par $Y_t := f(t, X_t)$ est encore un processus d'Itô et on a presque surement :*

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s) ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s) dX_s + \int_0^t \frac{\varphi_t^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s) ds.$$

Dans la formule précédente l'intégrale stochastique $\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t) dX_t$ est à comprendre comme une notation simplifiée de $\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s)\alpha_s ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s)\varphi_s dB_s$. La formule donné par ce théorème généralise la formule d'Itô du cas du mouvement Brownien à celui d'un processus d'Itô en général. On l'écrit aussi pour simplifier sous une forme différentielle :

$$dY_t = \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t) dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t) dX_t + \frac{\varphi_t^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X_t) dt.$$

Définition : Une é*quation différentielle stochastique* est une équation de la forme:

$$dX_t = \mu(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dB_t \tag{2}$$

où les solutions (X_t) sont des processus adaptés à la filtration naturelle du brownien B_t vérifiant l'équation pour tout t dans un intervalle $[t_0, t^+[$ et pour presque tout ω.

Exemples :

- $dX_t = X_t(\mu(t)dt + \sigma(t)dB_t)$ a pour solutions $X_t = X_0 \exp(\int_0^t (\mu(s) - \frac{1}{2}\sigma^2(s)) ds + \int_0^t \sigma(s) dB_s)$.
- $dX_t = -aX_t dt + \sigma dB_t$ a pour solutions $X_t = X_0 e^{-at} + \sigma \int_0^t e^{-a(t-s)} dB_s$.

Théorème 2 (Existence et unicité) *On considère l'équation différentielle stochastique (2) et on suppose que μ et σ sont des fonctions continues et qu'il existe une constante C telle que :*

1. $|\mu(t,x) - \mu(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq C|x - y|$
2. $|\mu(t,x)| + |\sigma(t,x)| \leq C(1 + |x|)$

Alors, pour tout $T > 0$, l'équation (2) admet une solution unique $\mathcal{F}_t-$adaptée dans l'intervalle $[0, T]$ (unique signifie que si X_t et $\overline{X}_t$ sont deux solutions, alors $\forall t \in [0, T]$, $X_t =^{ps} \overline{X}_t$).

Remarque : Les solutions dont ce théorème assure l'existence sont appelées des *solutions fortes.* En effet, on suppose ici que l'espace probabilisé filtré $(\Omega, P, \mathcal{F}_t)$ est donné ainsi que le mouvement brownien B_t. On aurait aussi pu regarder le problème sans supposer B_t donné, et rechercher alors un couple (X_t, B_t) qui satisfasse l'équation : dans ce cas on appelle la solution X_t une *solution faible.*

Exercices :

1. Utiliser la formule d'Itô pour déterminer la forme standard

$$dX_t = u(t,\omega)dt + v(t,\omega)dB_t$$

de l'EDS satisfaite par les processus suivants :

   (a) $X_t = B_t^2$

   (b) $X_t = B_t^3$

   (c) $X_t = 2 + t + e^{B_t}$

   (d) $X_t = e^{ct+aB_t}$

2. (a) Montrer que si X_t est solution de l'EDS $dX_t = a_t dt + dB_t$ alors X_t est une martingale si et seulement si $a_t = 0$ p.s.

   (b) Montrer que si X_t est solution de l'EDS $dX_t = v(t, \text{“}\omega\text{”})dB_t$ alors X_t^2 n'est pas toujours une martingale. (X_t est une martingale ; pourquoi ?)

   (c) Montrer que si X_t est solution de l'EDS $dX_t = v(t,.)dB_t$ alors

$$M_t := X_t^2 - \int_0^t |v(s,.)|^2 ds$$

   est une martingale.

   n.b. Le processus $\int_0^t |v_s(.)|^2 ds =: < X, X >_t$ s'appelle le *processus variation-quadratique* de la martingale X_t ; en général, pour un processus Y_t le processus variation-quadratique de Y_t est donné par

$$< Y, Y >_t := \lim_{\delta t \to 0^+} \sum_{s \in]0..t]_{\delta t}} (\delta X_s)^2 \quad ,$$

$$\text{où} \quad \delta X_s := \delta_{\delta t} X_s := X_s - X_{s-\delta t}$$

   (d) Soit X_t un processus d'Itô

$$dX_t = \alpha_t dt + \varphi_t dB_t \tag{3}$$

   On suppose que α_t est un processus continu de carré presque sûrement localement intégrable (cpsli), c'est-à-dire que, pour presque-tout ω, $\int_0^t \alpha_s^2(\omega)ds < \infty$ pour tout $t \geq 0$. Montrer que si $\alpha_t = 0$ p.s., alors X_t est une martingale.

   (e) **(admis)** Montrer, réciproquement, que si X_t est une martingale alors $\alpha_t = 0$ pour tout $t \geq 0$.

   (f) Soit S_t une solution de l'e.d.s.

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_t). \tag{4}$$

   Montrer que $\tilde{S}_t := e^{-rt} S_t$ est un processus d'Itô.

   (g) Soit C_t le prix d'une option de sous-jacent S_t, et $\tilde{C}_t := e^{-rt} C_t$ son prix actualisé. On suppose que

$$\tilde{C}_t = F(t, \tilde{S}_t),$$

   où F est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que $\tilde{C}_t$ est un processus d'Itô.

   (h) Montrer que F est solution d'une équation aux dérivées partielles que l'on précisera. (Indication : on sait que $\tilde{C}_t$ est une martingale).

3. Soit (B_t) un mouvement brownien et $(\mathcal{F}_t)$ sa filtration naturelle. Soit (X_t) un processus stochastique vérifiant l'EDS

$$dX_t = X_t\,(\mu(t)dt + \sigma(t)dB_t)$$

et soit (Y_t) le processus défini par $Y_t := X_t \exp(-\int_0^t \mu(s)ds)$.

   (a) Trouver une EDS satisfaite par Y_t.

   (b) Montrer que Y_t est une martingale.

   (c) En déduire que $X_t = \mathbb{E}(X_T \exp(-\int_t^T \mu(s)ds)/\mathcal{F}_t)$.