Université de Nice
Département de Mathématiques[1] Maîtrise MASS

Notes de cours 10 :
Options barrières

Définition : Une option barrière est un produit dérivé sur un actif sous-jacent (S_t) pour lequel le versement à l'échéance T de la fonction de paiment $\varphi(S_T)$ dépend du fait que le sous-jacent a franchi ou non, vers le haut ou vers le bas, durant la durée de vie du contrat $[0, T]$, une barrière H donnée. Les options barrières les plus courantes sont les *knock-out*, options qui expirent automatiquement lorsque le sous-jacent franchit la barrière et les *knock-in*, options qui au contraire ne sont activées que si le sous-jacent franchit au moins une fois la barrière avant l'échéance. Par ailleurs ces options s'appellent des call, des put, des options binaires, ... selon le choix de la fonction φ. Ainsi, par exemple,

- Une option DIC (*Down and In Call*) de prix d'exercice K, d'échéance T et de barrière H est le droit d'acheter le sous-jacent au prix K à la date T si celui-ci passe au moins une fois en dessous de la valeur H avant expiration du contrat.

- Une option U0P (*Up and Out Put*) de prix d'exercice K, d'échéance T et de barrière H est le droit de vendre le sous-jacent au prix K à la date T si celui-ci ne dépasse jamais la valeur H avant expiration du contrat.

Souvent le contrat consent un *rebate*, payé en cash, lorsque l'option est out. Les options barrières sont seulement négociées de gré à gré (OTC) ; elles sont appréciées car elles sont bien moins chères que les options *vanille* (de l'ordre de quatre fois moins), mais les deux parties prennent des risques plus importants.

Calcul du prix : l'exemple d'une DIC dans un marché sans taux d'intérêt.

Théorème 1 *On suppose $H < K$. Dans un marché sans taux d'intérêt, le prix, noté $DIC(t, x\ ; T, K, H)$, d'une option Down and In Call de prix d'exercice K, d'échéance T et de barrière H, calculé à l'instant t lorsque l'actif sous-jacent vaut x à cet instant, est donné par :*

$$DIC(t, x\ ; T, K, H) = \begin{cases} Call(t, x\ ; T, K) & si\ x \le H \\ \frac{K}{H} Put(t, x\ ; T, \frac{H^2}{K}) & si\ x > H \end{cases}$$

où $Call(t, x\ ; T, K)$ désigne le prix d'une option Call vanille *de prix d'exercice K, d'échéance T, calculé à l'instant t lorsque l'actif sous-jacent vaut x à cet instant, et de manière analogue pour $Put(t, x\ ; T, \frac{H^2}{K})$.*

Preuve : Le cas où $x \le H$ est trivial. Pour calculer le prix dans le cas où $x > H$, on introduit le *temps d'arrêt*, noté τ_H :

$$\tau_H = \begin{cases} \inf\{t \in [0, T], S_t \le H\} & \text{si } \{t \in [0, T], S_t \le H\} \neq \emptyset \\ T & \text{sinon} \end{cases}$$

Ceci permet d'écrire $DIC(T, S_T\ ; T, K, H) = (S_T - K)^+ \mathbb{I}_{\tau_H \le T}$. Lorsque $\tau_H \le H$, on a $DIC(\tau_H, H\ ; T, K, H) = Call(\tau_H, H\ ; T, K)$. Or $Call(\tau_H, H\ ; T, K) = \frac{K}{H} Put(t, x\ ; T, \frac{H^2}{K})$ en vertu des deux lemmes suivants :

Lemme 2 (Symétrie de Carr) *Dans un marché sans taux d'intérêt, $Call(t, x\ ; T, K) = Put(t, K\ ; T, x)$.*

Lemme 3 (Invariance par changement de numéraire) *Pour tout λ, $Put(t, \lambda x\ ; T, \lambda y) = \lambda Put(t, x\ ; T, y)$.*

Mais, en raison de l'hypothèse d'*abscence d'oportunité d'arbitrage*, deux portefeuilles qui ont le même flux à un instant futur ont la même valeur à toutes dates intermédiaires. Donc, pour tout (t, x), l'option $DIC(t, x\ ; T, K, H)$ a exactement le même flux futur que $\frac{K}{H}$ options $DIP(t, x\ ; T, \frac{H^2}{K}, H)$. Mais comme on a supposé que $H < K$, on a aussi $\frac{H^2}{K} < H$, donc, puisque $x > H$, $DIP(t, x\ ; T, \frac{H^2}{K}, H) = Put(t, x\ ; T, \frac{H^2}{K})$.
□

Exercices :

1. Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien sur (Ω, P), soit $H < 0$ et soit τ_H la v.a. sur Ω définie par $\tau_H := \mathrm{Min}\,\{t \geq 0, B_t \leq H\}$ si $\{t \geq 0, B_t \leq H\}$ est non vide, et $\tau_H = +\infty$ sinon. On pose

$$B_t^H = \begin{cases} B_t & \text{si } t \leq \tau_H \\ 2H - B_t & \text{si } t > \tau_H \end{cases}$$

   (a) Montrer que, si $\tau_H < +\infty$, $B_{\tau_H} = H$.

   (b) Tracer schématiquement sur le même dessin une trajectoire de B_t pour laquelle $\tau_H < +\infty$ et la trajectoire correspondante de B_t^H.

   (c) Montrer que l'on a $B_t^H = B_{t\wedge\tau_H} - \mathbb{I}_{\{t>\tau_H\}}(B_t - B_{\tau_H})$, où $t \wedge \tau_H$ désigne le plus petit des deux instants t et τ_H.

   (d) En déduire que

$$B_t^H = \int_0^t \left(\mathbb{I}_{[0,\tau_H]}(s) - \mathbb{I}_{]\tau_H,+\infty]}(s)\right) dB_s.$$

   (e) Calculer les deux premiers moments de B_t^H. En déduire que B_t^H est un mouvement brownien.

2. On appelle volatilité d'un actif X_t dont la dynamique est donnée par une équation d'Itô $dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t$ la quantité $v_X := \frac{\sigma(t,X_t)}{X_t}$.

   (a) Quelle est la volatilité v_S d'un actif S_t qui suit un modèle de Black-Scholes ? Que représente-t-elle ?

   (b) Montrer que la volatilité d'une option call européenne de sous-jacent S_t qui s'écrit $C_t = C(t, S_t)$ vérifie $\frac{v_C}{v_S} = \frac{1}{C_t}\frac{\partial C_t}{\partial x}S_t$.

   (c) En utilisant la formule de Black-Scholes pour C_t et l'expression du delta $\frac{\partial C_t}{\partial x}$, montrer que la volatilité du call est supérieure à celle du sous-jacent.