Université de Nice
Département de Mathématiques[1] Maîtrise MASS

Notes de cours 11 :
Changement de probabilité et théorème de Girsanov

Définition : Une probabilité Q sur un espace d'états $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ définit un *changement de probabilité* s'il existe une v.a. Y telle que, pour tout évènement $A \in \mathcal{A}$,

$$Q(A) = \mathbb{E}(Y \mathbb{I}_A).$$

La v.a. Y, notée $\frac{dQ}{dP}$, s'appelle la *dérivée de Radon-Nikodym* de Q par rapport à P. On se convaint facilement de l'existence d'une telle v.a. lorsque P et Q sont deux probabilités équivalentes sur un ensemble Ω fini (on dit que deux probabilités P et Q sont équivalentes *ssi* $P(A) > 0 \Leftrightarrow Q(A) > 0$).

Notons que la v.a. $\frac{dP}{dQ}$ a nécessairement une espérance égale à 1 et, si X est une v.a. sur Ω, et P et Q deux probabilités équivalentes, on a :

$$\mathbb{E}^Q(X) = \mathbb{E}^P\left(\frac{dQ}{dP}X\right).$$

Deux exemples :

1. Si S_n est une v.a. binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ et si l'on pose $Y_n = (\frac{q}{p})^{S_n}(\frac{1-q}{1-p})^{n-S_n}$, alors Y_n définit un changement de probabilité tel que, sous la nouvelle probabilité, S_n suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,q)$.

2. Soit U une v.a. normale d'espérance m et de variance σ^2. La v.a. $Y := exp(\lambda(U-m) - \frac{\lambda^2}{2}\sigma^2)$ définit un changement de probabilité tel que, sous la nouvelle probabilité, U est une v.a. normale d'espérance $m + \lambda\sigma^2$ et de variance inchangée.

Théorème 1 *Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un $P-$mouvement brownien et h une fonction de $L^2([0,T])$. La v.a. Y_T définie par*

$$Y_T := exp\left(-\int_0^T h(s)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^T h(s)^2 ds\right)$$

est un changement de probabilité $\frac{dQ}{dP}$ tel que le processus

$$(\tilde{B}_t)_{t\geq 0} := \left(B_t + \int_0^{t\wedge T} h(s)ds\right)_{t\geq 0}$$

soit un $Q-$mouvement brownien.

Exemples :

1. On peut transformer un mouvement brownien avec dérive $X_t = \mu t + \sigma B_t$ en le produit par σ d'un mouvement brownien sans dérive $\tilde{B}_t$ en changeant de probabilité (appliquer le théorème précédent à la fonction $h(t) = \frac{-\mu}{\sigma}$).

2. On peut transformer un mouvement brownien géométrique donné par $dX_t = X_t(\mu dt + \sigma dB_t)$ en n'importe quel MB géométrique donné par $dX_t = X_t(\nu dt + \sigma d\tilde{B}_t)$ en changeant de probabilité (appliquer le théorème précédent à la fonction $h(t) = \frac{-(\mu-\nu)}{\sigma}$).

Exercices :

1. Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soient X_1 une v.a. de Bernouilli $\mathcal{B}(1,p)$, $q \in]0,1[$, et
$$Y_1 := \left(\frac{q}{p}\right)^{X_1} \left(\frac{1-q}{1-p}\right)^{1-X_1}.$$
   (a) Verifier que $Y_1 > 0$ et que $\mathbb{E}Y_1 = 1$

   (b) *Changement de probabilité :* pour tout événement $A \subseteq \Omega$, on pose
$$\mathbb{Q}A := \mathbb{E}(Y_1 \mathbb{I}_A)$$
   Montrer que $\mathbb{Q}$ est une probabilité

   (c) On note $X_1^{\mathbb{Q}}$ la v.a. X_1 sous la probabilité $\mathbb{Q}$, c'est-à-dire la v.a. sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{Q})$ prenant les mêmes valeurs que X_1. Montrer que $X_1^{\mathbb{Q}}$ suit une loi de Bernouilli $\mathcal{B}(1,q)$.

   (d) Soit $n \geq 1$ entier, et X_n une v.a. binômiale $\mathcal{B}(n,p)$. Soit $Y_n > 0$ une v.a. telle que $\mathbb{E}Y_n = 1$, et $\mathbb{Q}^n$ la probabilité définie par
$$\mathbb{Q}^n A := \mathbb{E}(Y_n \mathbb{I}_A).$$
   Comment choisir Y_n pour que, sous $\mathbb{Q}^n$, la v.a. X_n suive un loi binômiale $\mathcal{B}(n,q)$? (*Indication :* rechercher Y_n de la forme $Y_n = f(X_n)$, c'est-à-dire X_n-mesurable, puis calculer $\mathbb{Q}^n\{X_n = k\}$.)

   (e) On suppose que $X_n = X_{n-1} + \delta X_n$, avec $X_0 = 0$ et $(\delta X_n)_{n\geq 1}$ suite de v.a. de Bernouilli $\mathcal{B}(1,p)$ *indépendantes*. Montrer que $(Y_n)_{n\geq 1}$ est une martingale.(*Indication :* utiliser que $X_{n+1} = X_n + \delta X_{n+1}$, et que δX_{n+1} est indépendant de la tribu $\mathcal{F}_n$ engendrée par les $X_1, \ldots, X_n$.)

2. Soit $dX_t = u(t)dt + dB_t$ un processus d'Itô et supposons, pour simplifier, que u soit bornée.

   (a) Vérifier que X_t n'est pas une martingale sauf si $u \equiv 0$.

   (b) On pose $Y_t := \exp(-\int_0^t u(s)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t u^2(s)ds)$ et $M_t := X_t Y_t$ (le processus Y_t est un changement de probabilité et s'appelle *la* martingale exponentielle). En utilisant la formule de Cameron-Martin montrer que le processus M_t est (cette fois) une martingale.