TD 17 et 18. Révisions sur les premiers cours

Exercice 1 : Un scientifique étudie la production de vitamine B6 par un nouveau procédé de fermentation. Il expérimente ce procédé sur un volume initial de 10 litres, et mesure la concentration de vitamine B6 au cours du temps. Il obtient les résultats suivants :

t (en h)	4	8	12	16	24	28	32	36	40
C (en gl^{-1})	0.094	0.178	0.329	0.580	1.429	1.918	2.326	2.612	2.787

1. Pertinence d'un modèle linéaire
   (a) Tracer le nuage de points (t,C). Une approximation linéaire vous semble-t-elle bonne à vue d'oeil ?, au vu du coefficient de corrélation linéaire ?
   (b) Caluler la droite des moindres carrés associée à ces données expérimentales. Selon ce modèle, au bout de combien de temps obtient-on une production de 10 grammes de vitamine B6 pour un volume initial de 10 litres de solution. Que pouvez vous conclure quant à la production de vitamine B6 au cours du temps ?
   (c) Discuter de la validité de ce modèle au vu de la question précédente ; puis au vu des résidus.
2. Etude d'un autre modèle
   (a) Tracer le nuage de points (x, y) où $x = e^{-t/6}$ et $y = 1/C$. Une approximation linéaire de ce nuage vous semble-t-elle bonne à vue d'oeil ?, au vu du coefficient de corrélation linéaire associé ?
   (b) Calculer la droite des moindres carrés associée au nuage (x, y).Discuter de la validité de ce modèle au vu des résidus.
   (c) En déduire une relation entre t et C. Selon ce second modèle, au bout de combien de temps obtient-on une production de 10 grammes de vitamine B6 pour un volume initial de 10 litres de solution. Que pouvez vous conclure quant à la production de vitamine B6 au cours du temps ?
   (d) Discuter de la validité de ce nouveau modèle au vu de la question précédente.
3. Conclusion : Quelle production pouvez espérer obtenir en deux jours pour un volume initial de 100000 litres ?

Exercice 2 : Considérons une cellule contenant N particules, chacune de ces particules étant de type A ou B. Lorsqu'une cellule se reproduit, chacune de ces particules se duplique à l'identique ; puis la cellule-mère se scinde en deux cellules-filles contenant chacune N particules choisies aléatoirement. Nous nous proposons d'étudier l'évolution du nombre de particules dans la descendence d'une cellule. Pour cela, à chaque génération nous choisissons aléatoirement une des deux cellules-filles.
Notons A_n le nombre de particules de type A au sein de l'unique cellule issue de la $n^{ième}$ génération (A_0 étant le nombre de particules de type A au sein de la cellule-mère initiale).

1. Expliquer pourquoi le nombre A_n suit une chaîne de Markov à $N + 1$ états $S = \{0, 1...N\}$ de matrice de transition $P = (p_{jk})_{0\leq j,k\leq N}$ donnée par
$$p_{jk} = \binom{2j}{k}\binom{2N-2j}{N-k}\binom{2N}{N}$$
2. On pose $N = 3$. On rappelle que $\binom{j}{k} = 0$ si $k > j$.
   (a) Dessiner le diagramme en points et flèches associé. Que peut on remarquer concernant les états 0 et 3 ?
   (b) Cette chaîne de Markov admet-elle une distribution stationnaire ? Si oui la(les)quelle(s) ?
   (c) Montrer que les trajectoires ($A_0 = 0, A_n = 1$ pour tout $n \geq 1$) et ($A_n = 1$ si n pair, $A_n = 2$ si n impair) sont impossibles.
   (d) Soit n un entier quelconque, montrer que si $A_n \in \{1, 2, 3\}$, alors il est possible que $A_{n+2} = 3$. Quelle propriété analogue obtient-on pour l'état 0 ?
3. Que peut on supposer si $N > 3$. Quelle interprétation génétique peut-on déduire de cette étude ?

4. (*) Discuter de la descendance complète (2^n cellules à la $n^i ème$ génération) d'une cellue mère contenant A_0 particules de type A.

Exercice 3 :