Université de Nice
Département de Mathématiques

SV1, année 2003-2004
Outils mathématiques pour les sciences du vivant

TD 9 et 10 : Modèles dynamique à une espèce

Exercice 1 : Soient a et b deux constantes et soit le modèle dynamique suivant : $\frac{dz(t)}{dt} = az(t) + b$.

- Vérifier que ce modèle présente un unique équilibre $z*$.
- Discuter sa stabilité en fonction des valeurs des deux constantes a et b.
- En posant $(a, b) = (1, -2)$, tracer dans le plan (t, z) suffisamment de vecteurs vitesse $(1, \frac{dz}{dt})$ pour deviner l'allure des diverses dynamiques proposées par ce modèle.
- Même questions pour $(a, b) = (-1, 3)$.
- Faire le changement d'inconnue $y(t) := z(t) - z*$, résoudre l'équation différentielle obtenue en y et en déduire l'expression des solutions de l'équation initiale en z. S'en servir pour vérifier que les dessins obtenus précédemment sont corrects.

Exercice 2 : Des nutriments entrent dans une cellule à la vitesse constante R molécules par unité de temps et en sortent proportionnellment à la concentration. Si $N(t)$ désigne la concentration à l'instant t cette dynamique peut s'écrire $\frac{dN(t)}{dt} = R - KN(t)$. Selon ce modèle, la concentration va-t-elle tendre vers un équilibre ? Lequel ? Est-il stable ?

Exercice 3 : Pour chacun des modèles dynamiques suivants :

$$y' = y - y^2 \ , \ y' = y^2 - 1 \ , \ y' = 1 - y^2 \ , \ y' = y(1 - y^2)$$

1. Faire une *étude qualitative*, c'est-à-dire déterminer la position des équilibres, calculer leur stabilité, tracer dans le plan (t, y) un certain nombre de vecteurs vitesse (1,y') et en déduire l'allure des graphes des solutions.
2. Décrire l'évolution au cours du temps d'une population (dont on supposera la taille y(t) positive ou nulle) décrite par ce modèle en discutant selon la taille initiale de la population $y(0)$.

Pensez-vous qu'une dynamique de la forme $y' = F(y)$ pourrait modéliser un comportement périodique du type $y(t) = \alpha \cos \gamma t + \beta$? Pourquoi ?

Exercice 4 : Etudier le modèle de dynamique de population suivant (*modèle de Gompertz*) et le comparer avec le modèle logistique :

$$\frac{dy(t)}{dt} = -\alpha y(t) \ln(\frac{y(t)}{\kappa}),$$

avec $\alpha > 0$ et $\kappa > 0$.

Exercice 5 : On étudie l'effectif $p(t)$ d'une population d'oiseaux granivores en fonction du temps t mesuré en jours.

1. Quelle est cette dynamique si l'on suppose les variations de cette population proportionnelles à son effectif ?
2. S'il y a 160 oiseaux le deuxième jour et 640 le quatrième, quel était l'effectif initial ?
3. On suppose à présent que cette population suit un modèle logistique $p' = rp - sp^2$ avec $p(0) = 40$, $r = 0,6$ et $s = 10^{-3}$. Décrire sa dynamique dans ce cas.
4. On suppose enfin qu'on effectue sur cette population un prélèvement continu d'une fraction de population égale à h ($h > 0$). Comment cela modifie-t-il la dynamique de la population ? Indiquer quelles valeurs de h assurent la préservation de la population.

Exercice 6 :

1. Montrer que l'équation différentielle

$$\frac{dy(t)}{dt} = -2y(t) + 4 \cos t$$

possède une solution particulière de la forme $\hat{y}(t) = A \cos t + B \sin t$.

2. Faire le changement d'inconnue $x(t) := y(t) - \hat{y}(t)$, résoudre l'équation différentielle obtenue en x et en déduire l'expression des solutions de l'équation initiale en y.
3. Indiquer l'allure des graphes des solutions de l'équation ; Décrire le comportement des solutions lorsque t tend vers l'infini. On appelle parfois la solution $\hat{y}(t)$ un *équilibre dynamique*. Qu'en pensez-vous ?

Exercice 7 : Montrer qu'on peut transformer une équation logistique $y' = ry(1-y/K)$ en une équation linéaire $z' = rz + b$ au moyen du changement d'inconnue $z := \frac{1}{y}$. Retrouver l'expression explicite de la solution d'une équation logistique donnée en cours.

Exercice 8 : L'évolution de la population des Etats Unis entre 1790 et 1930 présente une croissance amortie caractéristique d'un modèle logistique. On estime que taux de croissance intrinsèque est de $r = 0,03134$ et la capacité biotique de $K = 197273000$. Sachant que la population était de 3929000 en 1790, en quelle année a-t-elle, selon ce modèle, passé le cap des 50000000 ? le cap des 100000000 ? Discuter la pertinence de ce modèle.

Exercice 9 : Une population $y(t)$ est soumise à une contrainte saisonnière périodique qui affecte sa capacité biotique. Le modèle proposé, appelé *modèle à capacité saisonnière*, est le suivant :

$$\frac{dy(t)}{dt} = ry(t)\left(1 - y(t)\frac{1+\beta\cos(\gamma t)}{K}\right)$$

avec $\alpha > 0$, $K > 0$, $\gamma > 0$ et $0 < \beta < 1$.

1. Transformer cette équation en une équation linéaire au moyen du changement d'inconnue $z := \frac{1}{y}$.
2. Résoudre l'équation linéaire obtenue (faire un dessin).
3. En déduire l'allure des dynamiques décrites par le modèle proposé et les comparer aux dynamiques du modèle logistique de même taux intrinsèque r et même capacité biotique K.

Exercice 10 : Une population de punaises vivant sur une surface plane se rassemble en colonies ayant la forme d'une disque. Le taux d'accroissement naturel des punaises est r_1. De plus, les punaises situées à la périphérie souffrent du froid et ont un taux de mortalité suplémentaire. Si $y(t)$ désigne le nombre total de punaises et si l'on admet que le nombre de celles de la périphérie est proportionnel à $\sqrt{y}$, la dynamique de cette population pourrait vérifier l'équation :

$$y' = r_1 y - r_2\sqrt{y}.$$

Dessiner quelques solutions de cette équation. Décrire les diverses dynamiques possibles selon la valeur de la population initiale.