Eléments de réponse aux exercices des TD1, TD2 et TD3

1 Exercice 3 - TD1

1. Une dynamique où les variations de la population sont proportionnelles à la population elle même suit un modèle malthusien:
$$p' = rp$$
2. La solution explicite d'un modèle malthusien est: $p(t) = p(0)e^{rt}$.
On nous donne: $p(2) = 160$, $p(4) = 640$
Les solutions de ce système de deux équations à deux inconnues sont:
$$r = \ln 2, \quad p(0) = 40$$
3. On détermine le taux de croissance intrinsèque et la capacité biotique:
$$r = 0{,}6; \quad K = \frac{r}{s} = 600$$
La population augmente vers la capacité biotique $K = 600$ au cours du temps. (Pour une étude complète voir les autres exercices sur le modèle logistique)

2 Exercice 4 - TD2

1. On calcule la dérivée de $\hat{y}$ afin de déterminer les coefficients A et B:
$$\begin{aligned} \hat{y'}(t) &= -A\sin t + B\cos t \\ \hat{y'}(t) &= -\frac{A}{B}\hat{y}(t) + (\frac{A^2}{B} + B)\cos t \end{aligned}$$
On faisant une correspondance des coefficients avec l'équation de l'énoncé, on obtient: $A = \frac{8}{5}$,$B = \frac{4}{5}$
2. On effectue le changement de variable proposé, on calcule la fonction explicite de notre nouvelle fonction x et on obtient finalement la fonction explicite de notre fonction y:
$$\begin{aligned} x &= y - \hat{y} \\ x' &= y' - \hat{y'} = -2x \\ x(t) &= x(0)e^{-2t} \\ x(0) &= y(0) - \frac{8}{5} \\ y(t) &= (y(0) - \frac{8}{5})e^{-2t} + \hat{y}(t) \end{aligned}$$
3. La figure donne l'allure du graphe pour une population initiale de (1, 5, 10 et 20) individus. Lorsque t est grand, la population suit le cycle décrit par $\hat{y}(t)$, équilibre dynamique de notre problème. Au bout d'un certain temps, quelque soit la population initiale $y(0)$, la population va suivre le cycle décrit par la courbe $\hat{y}(t)$. On nomme cet équilibre dynamique car contrairement aux équilibres étudiés jusqu'à présent, il n'est pas stationnaire.

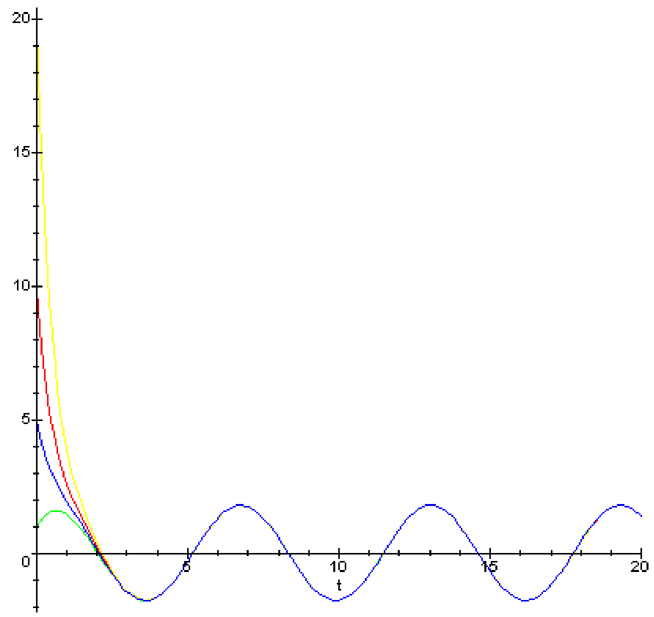

FIG. 1 – *Allure des graphes de y pour y(0)=5*

3 Exercice 2 - TD3

1. Le niveau de dynamique maximum que la population peut atteindre est équivalent au niveau maximum de la dérivée de y. On calcule donc le niveau maximum de $y' = f(y) = ry(1 - \frac{y}{K})$, i.e. le sommet de la parabole $f(y)$. On fait par exemple une étude de fonction sur $f(y)$.
f est dérivable sur $\Re^+$ de dérivée:
$$f'(y) = r - 2\frac{r}{K}y$$
Donc, d'après l'étude du signe de la dérivée, f est croissante sur $[0,\frac{K}{2}]$, décroissante sur $[\frac{K}{2}, +\infty]$ et atteind son maximum en $y = \frac{K}{2}$. Le niveau de développement maximum de la population est $f(\frac{K}{2}) = \frac{rK}{4}$.
2. Ce niveau de développement n'est atteind que sur les trajectoires de conditions initiales $\leq \frac{K}{2}$.
3. On suppose dans cette partie que $E < r$.
On cherche les points d'équilibre de notre modèle de pêche avec limitation par effort de pêche:
$$y' = g(y) = ry(1 - \frac{y}{K}) - Ey = y(r(1 - \frac{y}{K}) - E)$$
On obtient deux équilibres: $y_1 = 0$ et $y_2 = K(1 - \frac{E}{r})$.
On étudie maintenant la stabilité de nos équilibres: $g'(y) = (r - E) - 2\frac{r}{K}y$.
$g'(0) = r - E > 0$ donc 0 est un équilibre instable.
$g'(K(1 - \frac{E}{r})) = E - r < 0$ donc $K(1 - \frac{E}{r})$ est un équilibre stable. L'unique équilibre stable est $y_2 = K(1 - \frac{E}{r})$.
4. L'ordonnée de la figure 2 Leur point d'intersection représentent l'équilibre stable de notre population. En effet $g(y) = 0$ est équivalent à $f_1(y) = f_2(y)$. L'ordonnée de ce point d'équilibre

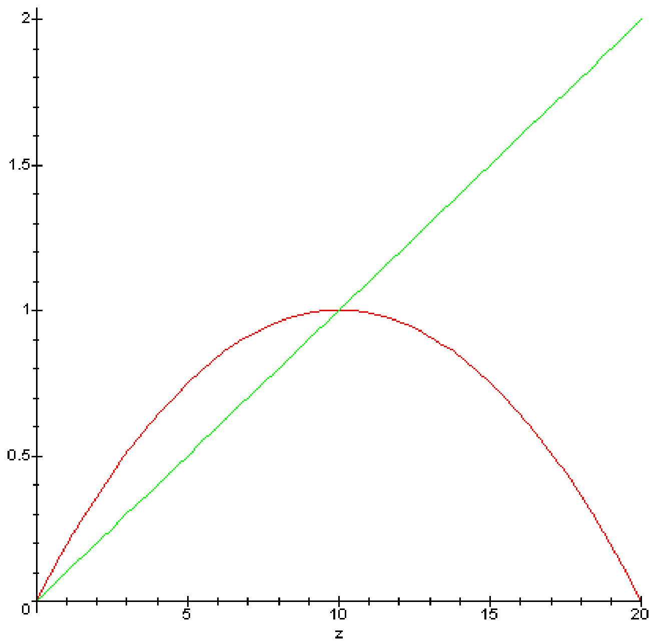

FIG. 2 – *La droite représente Ey pour $E = \frac{r}{2}$. La parabole représente $f_1(y)$*

est maximale lorsque f_2 coupe f_1 en son sommet $(\frac{K}{2}, \frac{rK}{4})$.
On obtient une telle intersection lorsque $E\frac{K}{2} = \frac{rK}{4}$) et donc $E = \frac{r}{2}$.

5. D'après la question précédente, le rendement durable maximal est égal à:

$$Ey_2 = \frac{rK}{4}$$

Ce résultat n'est pas étonnant car si l'on veut pouvoir pêcher le plus possible de façon durable, il est naturel de chercher à stabiliser sa population de poison à une taille pour laquelle son niveau de développement est maximal. On notera que si l'on augmente l'effort de pêche E au dela de $\frac{r}{2}$, l'équilibre se déplace vers 0 et la quantité pêchée à l'équilibre, proportionnelle au taux Ey_2, va diminuer.

6. $K = 1000$. Si $r = 5.10^{-4}$, $E = \frac{r}{2} = 2{,}5.10^{-4}$.

4 Exercice 4 - TD3

Comme on s'intéresse à une fonction ln, y est strictement positif. On cherche les points d'équilibres:

$$f(y) = y' = -\alpha y \ln(\frac{y}{K})$$

L'équation $f(y) = 0$ a pour unique solution $y_2 = K$ ($y_1 = 0$ est impossible). K est donc l'unique équilibre du modèle de Gompertz.
On étudie la stabilité de l'équilibre K:

$$f'(y) = \alpha \ln(\frac{y}{K}) - \alpha$$

$f'(K) = -\alpha < 0$ donc K est un équilibre stable.
On peut maintenant tracer le champ de vecteurs et des solutions particulières de K. Ce modèle évolue de manière similaire au modèle logistique (même équilibre stable). Plus précisément, on peut voir que le modèle est équivalent au modèle de logistique au voisinage de l'équilibre K. Lorsque l'on s'éloigne de l'équilibre K, la vitesse de convergence vers cet équilibre est beaucoup plus rapide que dans le modèle logistique. On peut mettre en évidence cet effet en calculant la fonction explicite du modèle de Gompertz.
On pose le changement de variable $x = \ln(\frac{y}{K})$ On cacule la dérivée de x:

$$x' = \frac{y'}{y} = -\alpha \ln \frac{y}{K} = -\alpha x$$

$$x(t) = x(0)e^{-\alpha t}$$

$$y(t) = K\left(e^{ln\left(\frac{y(0)}{K}\right)e^{-\alpha t}}\right)$$

On obtient une exponentielle d'exponentielle, qui augmente beaucoup plus rapidement que l'exponentielle pour les valeurs éloignées de l'équilibre K.