

Correction des exercices de la leçon 4

9 novembre 2004

Exercice 1

1.

$$P(h, a, f, h) = P(X_0 = h) \cdot 0,45 \cdot 0,4 \cdot 0 = 0 .$$

$$P(h, a, f, a) = P(X_0 = h) \cdot 0,45 \cdot 0,4 \cdot 0,1 = 0,018 \pi_0(1) .$$

$$P(a, a, a) = P(X_0 = a) \cdot 0,5 \cdot 0,5 = 0,25 \pi_0(2) .$$

2.

$$\pi_1 = \pi_0 \cdot \mathbb{P} = (1, 0, 0) \cdot \begin{pmatrix} 0,5 & 0,45 & 0,05 \\ 0,1 & 0,5 & 0,4 \\ 0 & 0,1 & 0,9 \end{pmatrix} = (0,5 \quad 0,45 \quad 0,05) .$$

Cela donne les proportions de parcelles recouvertes d'herbes, d'arbustes ou de grands arbres au bout de trois ans si on suppose qu'au début il n'y a que de l'herbe.

3.

$$\pi_0 \cdot \mathbb{P} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \cdot \begin{pmatrix} 0,5 & 0,45 & 0,05 \\ 0,1 & 0,5 & 0,4 \\ 0 & 0,1 & 0,9 \end{pmatrix} = (0,2 \quad 0,35 \quad 0,45) \neq \pi_0 , \text{ donc la}$$

distribution π_0 n'est pas stationnaire.

Ainsi donc si il y a autant de parcelles de chacun des trois types, la distribution ne sera pas la même à l'étape suivante.

4. On doit résoudre $\pi \cdot \mathbb{P} = \pi$, en se rappelant que π représentant une distribution, la somme de ses coefficients est égale à 1. Ainsi si $\pi = (p \quad q \quad r)$ on doit résoudre

$$\begin{cases} 0,5 p + 0,1 q = p \\ 0,45 p + 0,5 q + 0,1 r = q \\ 0,05 p + 0,4 q + 0,9 r = r \\ p + q + r = 1 . \end{cases}$$

On trouve une unique solution, $\pi = \left(\frac{2}{53} \quad \frac{10}{53} \quad \frac{41}{53}\right)$.

Exercice 2

5. $\pi_0 = (1/5 \quad 1/5 \quad 3/10 \quad 1/5 \quad 1/10)$: on suppose que la probabilité d'être dans une case est proportionnelle au nombre de portes de cette case. Cela signifie qu'il existe un nombre α tel que $\pi_0(1) = 2/\alpha$, $\pi_0(2) = 2/\alpha$, $\pi_0(3) = 3/\alpha$, $\pi_0(4) = 2/\alpha$, $\pi_0(5) = 1/\alpha$. Pour déterminer α il suffit alors de se rappeler que $\sum \pi_0(i) = 1$. On trouve ainsi $\alpha = 10$.

6. C'est bien une distribution stationnaire (et c'est la seule).