Option Statistique

TD 8. Limite de sommes de v.a. indépendantes identiquement distribuées

L'objet de cette séance est d'observer la loi des sommes de v.a. indépendantes identiquement distribuées (i.i.d.) et d'expériementer leur comportement statistique. Nous allons expérimenter deux théorèmes : le théorème central-limit (voir document joint) et le théorème suivant :

Théorème 1 *Soit* $S_n \rightsquigarrow \mathcal{B}(n, p_n)$*, où* $\mathcal{B}(n,p)$ *désigne la loi binômiale, loi d'une sommes de* n *v.a. i.i.d. de Bernoulli* X_i *avec* $p = P(X_i = 1)$*. Si* $\lim_{n\longrightarrow\infty} np_n = \lambda$*, alors* S_n *tend en loi vers une v.a.* S *suivant une loi de Poisson :* $\mathbb{P}(S = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k\,!}$.

I Illustration des théorèmes.

1. Ouvrir un classeur Excel ; le nommer TD8. En cellule A1 écrire p et placer en cellule B1 la valeur $0,5$ choisie pour p.

2. En cellule A3 écrire k et, dans cette même ligne, donner aux cellules suivantes les valeurs 0 à 25 : on a choisi $n = 25$. En cellule A4 écrire Pk (pour $\mathbb{P}(S_n = k)$), puis calculer dans les cellules suivantes de la ligne 4 la valeur de $\mathbb{P}(S_n = k) = \begin{pmatrix} k \\ 25 \end{pmatrix} p^k(1-p)^{n-k}$; utiliser la remarque que $\mathbb{P}(S_n = k) = \mathbb{P}(S_n = k-1)\frac{p(n-k+1)}{(1-p)k}$ et $\mathbb{P}(S_n = 0) = (1-p)^n$.

3. Reformater les colonnes : marquer toute la zône, formater toutes les cellules pour n'avoir que deux chiffres après la vigules, et toutes les colonnes en ajustement automatique.

4. A l'aide de l'assistant graphique, représenter l'histogramme des probabilités (lignes 3 et 4).

5. En ligne 5 représenter les valeurs correspondantes pour une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$, où $\mu = \mathbb{E}(S_n) = np$ et $\sigma = Ecart - type(S_n) = \sqrt{np(1-p)}$. Veiller à utiliser la cellule B1 pour valeur de p

6. En cliquant du droit sur le tracé de la figure, ajouter cette nouvelle série. Choisir un tracé en mode courbes pour la série normale. Soignez les titres et légendes.

7. Changer de valeur de $p \in \{0,4\ ; 0,3\}$ et faites recalculer/redessiner

8. Changer de valeur de $p \in \{0,04\ ; 0,08\ ; 0,12\}$ et faites recalculer/redessiner. Qu'observez-vous ?

9. Prendre $p = 0,04$. En ligne 6 représenter les valeurs correspondantes pour une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, avec $\lambda = n*0,04 = 1$. Ajouter à votre tracé ces nouvelles probabilités.

10. Recommencer pour les deux autres petites valeurs de p ($\lambda = 2$ puis 3.)

II Expérimentation d'une somme de v.a. de Bernoulli

Choisir une nouvelle feuille de votre classeur Excel.

1. Placer dans la cellule A1 la valeur $0,5$ choisie pour p. Donner à la cellule A2 la valeur `=ENT(ALEA()+$A$1` . Que donne cette fonction ?

2. Passer en mode calcul sur ordre par **Outils - Options... - Calculs**. Recopier la cellule A2 en B2 à Z2, et donner à la cellule AA2 la valeur somme des cellules A2 à Z2.

3. Reformater les colonnes : marquer toute la zône, formater toutes les cellules pour n'avoir que deux chiffres après la vigules, et toutes les colonnes en ajustement automatique.

4. Reproduire la ligne 2 dans les lignes 3 à 201, de manière à ce que la colonne AA représente un échantillon de 200 tirages d'une binômiale $\mathcal{B}(p, 26)$

5. Afin de tracer un histogramme de cet échantillon, nous allons créer un tableau des effectifs. Donner aux cellules AC1 à AC25 les valeurs 0 à 24. Marquer la zone AD1 : AD26 et appeler la fonction `FREQUENCE`. Donner à **Tableau-données** les 200 valeurs de votre échantillon ; donner à **Matrice_intervalles** la zone des 25 valeurs de bornes d'intervalles de la colonne AC. *Ne pas cliquer OK,* mais taper **Ctrl-Shift-Return**. Vous devriez obtenir les *effectifs* des classes choisies (que MS-Excel appelle *Fréquence !*)

6. Tracer l'histogramme correspondant.

7. Multipliez les expériences en changeant l'échatillon au moyen de **F9**.

8. En colonne AE, calculer les valeurs de la densité d'une variable aléatoire normale `LOI.NORMALE(`μ`,`σ`)` correspondante. Tracer.

III Expérimentation d'une somme de v.a. de loi uniforme $\mathcal{U}_{[a,b]}$

Recommencer en remplaçant les v.a. de Bernoulli par des v.a. de loi uniforme $\mathcal{U}_{[a,b]}$ (faites figurer vos valeurs de $a = 0,5$ et $b = 2,5$ dans la première ligne d'une nouvelle page de votre classeur.) Rappelons que si $Y \rightsquigarrow \mathcal{U}_{[a,b]}$, alors $\mathbb{E}Y = \frac{1}{2}(a+b)$ et $\mathrm{Var}\,(Y) = \frac{1}{12}(b-a)^2$.