Université de Nice
Département de Mathématiques

Année 2005-2006
Licence MI/MP 2e année

**Statistiques : notes du cours 5**
**Tests du Chi deux**

**I. Un exemple de test d'ajustement d'une loi empirique à une loi de probabilité théorique :** En lançant successivement 60 fois un dé, un joueur obtient les résultats suivants :

| $i$ (face) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $0_i$ (effectifs observés) | 15 | 7 | 7 | 11 | 6 | 14 |

Si le dé n'est pas truqué, sa loi théorique est la **loi uniforme**, c'est-à-dire que chaque face a la même probabilité $\frac{1}{6}$ d'apparaître, donc les effectifs théoriques pour 60 lancés sont de 10 pour chaque face :

| $i$ (face) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $T_i$ (effectifs théoriques) | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 |

Pour mesurer l'écart entre la loi empirique obtenue et la loi théorique supposée, on calcule la quantité

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{(O_i - T_i)^2}{T_i} \tag{1}$$

appelée *Chi-deux de l'échantillon*. Comme l'on connait l'effectif total, l'un des 6 effectifs observés peut se déduire des 5 autres : on dit alors que c'est un **khi-deux à 5 degrés de liberté**. Cette quantité est aléatoire puisque si l'on répète la série de 60 lancés on obtiendra un autre Khi-deux. On peut montrer que lorsque la taille (ici $n = 60$) de l'échantillon est assez grande, sa loi de probabilité a une densité $f(x)$ que l'on peut assimiler à celle d'une v.a. notée $\chi^2(5)$. On désigne par $t_\alpha$ la valeur du Khi-deux telle que $P(\chi^2 \geq t_\alpha) = \alpha$. Pour tester la qualité de l'ajustement de la loi empirique du dé à une loi uniforme on procède à un **test du Chi-deux** de la façon suivante :

- on choisit l'hypothèse nulle $H_0$ selon laquelle "le dé est normal" que l'on teste contre l'hypothèse alternative $H_1$ selon laquelle "le dé est truqué".
- on choisit un seuil $\alpha$, risque de rejet à tort de l'hypothèse $H_0$, et on en déduit l'intervalle d'acceptation $I(\alpha) := [0, t_\alpha]$ définie par la relation (**??**). Sous l'hypothèse nulle $H_0$, $P(\chi^2 \notin I(\alpha)) = \alpha$.
- On effectue une série de $n$ lancés ($n$ suffisamment grand) puis on calcule le Chi-deux selon la formule (1).
- On conclut : si la valeur trouvée n'appartient pas à $I(\alpha)$, c'est-à-dire si le Chi-deux est plus grand que $t_\alpha$, on rejette l'hypothèse $H_0$ et le dé est déclaré truqué. Sinon, l'hypothèse $H_0$ n'est pas rejetée et on en déduit que les variations d'effectifs observées ne permettent pas de mettre en doute le fait que le dé soit normal.

Remarque : Dans cet exemple la loi considérée comporte 6 classes mais on peut facilement généraliser ce test à des loi comportant $r$ classes. Dans ce cas, le nombre de degrés de liberté de la loi du Chi-deux est $r - 1$, c'est-à-dire qu'il convient de calculer l'intervalle $I(\alpha) = [0, t_\alpha]$ au moyen de la densité de $\chi^2(r - 1)$.

**2. Un exemple de test d'homogénéité**

Dans une population formée d'individus répartis en différentes catégories (hommes/femmes, classes d'ages, niveaux socio-économiques, etc...), on observe une variable (effet d'un médicament, présence d'un comportement à risque, performances ...) et on se demande si ses variations selon les différentes catégories de la population sont simplement dues au fluctuations d'échantillonnage ou si au contraire elles révèlent des comportements différents de la variable dans chacune de ces catégories. On peut conclure grace à un test d'homogénéité dont voici le principe sur un exemple.

Dans une université où les initiatives pédagogiques différenciées sont vivement encouragées trois groupes de professeurs ont mis au point trois méthodes différentes d'apprentissage des Mathématiques qu'on a appliqué à trois échantillons d'étudiants ayant sensiblement le même niveau initial. A l'examen les résultats furent les suivants :

| **Observés** | Admis | Ajournés | sommes |
|---|---|---|---|
| Méthode 1 | **51** | **29** | |
| Méthode 2 | **38** | **12** | |
| Méthode 3 | **86** | **34** | |
| sommes | | | |

Peut-on affirmer que l'une des trois méthodes est plus efficace que les autres en termes de réussite à l'examen ? Pour répondre à cette question, on teste l'hypothèse $H_0$ : *il n'y a pas de différence significative entre les pourcentages de réussite de ces trois groupes d'étudiants,* contre l'hypothèse $H_1$ : *une au moins de* *ces méthodes est significativement plus efficace que les autres.* Pour effectuer ce test on compare le **tableau des effectifs observés** ci-dessus au **tableau des effectifs théoriques** ci-dessous correspondant à une population, regroupant les trois groupes, qui serait parfaitement homogène si $H_0$ était vrai. Le nombre théorique d'admis parmi les étudiants ayant suivi la méthode 1 sera égal à $56 = \frac{175}{250}80$ car il y a un taux de réussite global de $175/250 = 70\%$ et le nombre total d'étudiants ayant suivi la méthode 1 est de 80.

| **Théoriques** | Admis | Ajournés | sommes |
|---|---|---|---|
| Méthode 1 | 56 | | 80 |
| Méthode 2 | | | 50 |
| Méthode 3 | | 36 | 120 |
| sommes | 175 | 75 | 250 |

On calcule alors le Chi deux de ces tableaux $l \times c$ d'effectifs, noté $X^2$ de la façon suivante :

$$X^2 = \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{c}\frac{(O_{ij}-T_{ij})^2}{T_{ij}} = \frac{(51-56)^2}{56} + \ldots + \frac{(34-36)^2}{36} \simeq 2,51.$$

Sous des hypothèses généralement satisfaites dans la pratique (échantillons disjoints, sélectionnés de façon indépendante et de taille suffisante), on peut considérer que la quantité $X^2$ qui est aléatoire (car elle dépend du choix des échantillons) suit une loi du $\chi^2(dl)$ ayant un nombre de degré de liberté $dl$ égal à $dl = (c-1)(l-1)$. Pour tout choix d'un seuil $\alpha$, on construit alors un intervalle d'acceptation $I(\alpha) = [0\ ; t_\alpha]$, où $t_\alpha$ est défini par $P(X^2 > t_\alpha) = \alpha$. On conclut, au risque $\alpha$ (c'est-à-dire avec une probabilité de rejet à tord de $\alpha$), que :

- Si $X^2 \geq t_\alpha$, l'hypothèse $H_0$ doit être rejetée, c'est-à-dire que les trois méthodes d'apprentissage ne peuvent être considérées comme équivalentes.
- Si $X^2 < t_\alpha$, on ne peut pas rejeter l'hypothèse $H_0$, c'est-à-dire que, malgré les différences de résultats à l'examen, les méthodes se valent.

**Un exemple de test d'indépendance**

Rappelons que deux variables aléatoires $X$ et $Y$ prenant les valeurs $\{x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_l\}$ et $\{y_1, \ldots, y_j, \ldots, y_c\}$ avec les probabilités $\mathbb{P}(X = x_i) = p_i$ et $\mathbb{P}(Y = y_j) = q_j$ sont dites indépendantes si et seulement si $\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) = \mathbb{P}(X = x_i)\mathbb{P}(Y = y_j) = p_i q_j$. Pour tester l'indépendance de deux caractères, on peut utiliser un test du Chi deux de la façon suivante : on réunit dans un tableau les effectifs $O_{i,j}$ d'individus donnant à $X$ et $Y$ les valeurs $(x_i)$ et $(y_j)$ et on calcule les effectifs théoriques à partir de la proportion théorique produit $p_i q_j$. Voici un exemple.

On veut savoir si l'efficacité d'un vaccin contre la grippe est indépendante du fait qu'on l'administre à des patients de moins de 55 ans ou à des patients strictement plus agés. Considérons un échantillon A de personnes vaccinées de 55 ans ou moins, et un échantillon B de personnes vaccinées de plus de 55 ans.

| **Observés** | Grippés | Non-grippés | sommes |
|---|---|---|---|
| A | **38** | **82** | 120 |
| B | **72** | **108** | 180 |
| sommes | 110 | 190 | 300 |

Sous l'hypothèse $H_0$ : *les deux caractères sont indépendants*, les proportions conjointes sont :

| **Pr. théoriques** | Grippés | Non-grippés | Proportions |
|---|---|---|---|
| A | 0,15 | 0,25 | 0,4 |
| B | 0,22 | 0,38 | 0,6 |
| Proportions | 0,37 | 0,63 | 1 |

Comme la population totale est de 300, on en déduit que les effectifs théoriques sous l'hypothèse $H_0$ sont

| **Effec. théoriques** | Grippés | Non-grippés |
|---|---|---|
| A | 44 | ..... |
| B | ..... | 114 |

On calcule alors le $X^2$ de ces échantillons, qui suit une loi du $\chi^2$ à $(l-1)*(c-1) = 1$ degrés de libertés : $X^2 = \frac{(38-44)^2}{44} + \ldots + \frac{(108-114)^2}{114} = 2,15$. Au risque $\alpha = 10\%$, l'intervalle d'acceptation $I(\alpha) = [0\ ; t_\alpha]$ est $I(\alpha) = [0\ ; 2,71]$. Nous voyons donc qu'ici on ne peut pas rejeter $H_0$ : il est bien possible que malgré les différences d'âge, l'efficacité du vaccin soit la même.