Sur les origines de la méthode de Laplace

- *Théorie de l'approximation des formules qui sont fonctions de très-grands nombres* (1778)

- d.a. d'intégrales du type $I(n) := \int_{u_0}^{u_1} e^{nf(u)} g(u) du$.

- continuateur de $\boxed{\text{de}}$ Moivre (1771)

- lui-même frappé par les calculs de Stirling (1730) et $\boxed{\text{Wallis}}$

- Souligne le caractère *très-convergent* des développements qu'il obtient, donc bien avant Poincaré et Stieltjes

$$n\,! = n^n e^{-n} \sqrt{n} \boxed{\sqrt{2\pi}} S^{(n)} \text{ avec } S^{(n)} = 1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + \ldots + \frac{s_{i_0}}{n^{i_0}} + O\left(\frac{1}{n^{i_0+1}}\right).$$

Développements d'Edgeworth

Let $(Y_j)_{j\geq 1}$ be a sequence of independent identically distributed random variables. Let $\varphi(t) := \mathbf{E}(e^{itY_j})$ be their caracteristic function, and

$$F_n(x) := P\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n} Y_j \leq x\right).$$

Assume they have r moments $\boxed{\mu_1 = 0}$, $\mu_2 =: \sigma^2$, ..., μ_r. If

$$\limsup_{|t|\to\infty} |\varphi(t)| < 1,$$

then $F_n(x)$ admits an a.e. in powers of $\frac{1}{\sqrt{n}}$ up to order $r-2$

$$F_n(x) = \mathcal{N}(x) \;+\; n(x)\sum_{i=1}^{r-2}\frac{R_i(x)}{\sqrt{n}^k} \;+\; O\left(\frac{1}{\sqrt{n}^{r-1}}\right)$$

with $n(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ and $\mathcal{N}(x) := \int_{-\infty}^{x} n(\xi)d\xi$, and the $R_i(x)$ are polynomial functions that can be computed from the derivatives of $n(x)$ and the cumulants of any Y_j.

La fonction de répartition $F_n(x)$ à développer

- $Y_1^{(n)}, \ldots, Y_n^{(n)}$ une famille $\boxed{\text{triangulaire}}$ de v.a. de Bernoulli i.i.d.

- $$p^{(n)} = p_0 + \frac{p_1}{\sqrt{n}} + \frac{p_2}{n} + \ldots + \frac{p_{i_0}}{(\sqrt{n})^{i_0}} + O\left(\frac{1}{(\sqrt{n})^{i_0+1}}\right) \quad (i_0 \geq 0)$$

- $$X_n := \frac{Y_1^{(n)} + \ldots + Y_n^{(n)} - np^{(n)}}{\sigma^{(n)}\sqrt{n}} \text{ , (} \sigma^{(n)} := \sqrt{p^{(n)}(1 - p^{(n)})} \text{)}$$

- Nous retrouverons l'extension de Lindeberg-Feller theorème Central-Limit :

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \mathcal{N}(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du.$$

- la fonction de répartition F_n est une $\boxed{\text{somme binômiale incomplète}}$

$$F_n(x) = \sum_{j=0}^{k(n,x)} \left(\begin{array}{c} n \\ j \end{array} \right) \left(p^{(n)}\right)^j \left(q^{(n)}\right)^{n-j}$$

  avec

$$h^{(n)}(x) := np^{(n)} + x\sigma^{(n)}\sqrt{n} \text{ , et } k(n,x) := [h^{(n)}(x)].$$

- c'est la présence de la fonction (discontinue) "partie entière" qui est la source du problème.

Quelques citations d'Arnaud Denjoy (1962)

- L'esprit de Dieu se joue dans l'innombrable, mais ne s'évade jamais du fini.

- Le discontinu et le fini sont les modes par lesquels l'oeuvre de Dieu s'est accomplie. Le continu et l'infini sont les recours de notre intelligence, impuissante à sauter les déliements de la nature et à concevoir les trop nombreuses accumulations d'objets élémentaires.

- Mais les analystes ne s'arrêtent jamais de recommencer un pas qu'ils ont une fois appris à faire. A eux aussi le premier seul coûte.

(citations offertes par Jean Mawhin, en décembre 1988, à Strasbourg)

La formule magique

Lemme 1 *Soient* $p \in [0,1]$, $n \in \mathbf{N}$ *et* $k \in \{0,1,2,\ldots,n-1\}$. *Alors :*

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} = (n-k) \binom{n}{k} \int_p^1 v^k (1-v)^{n-k-1} dv$$

Preuve : Par récurrence ascendante sur $k = 0 \ldots n-1$, en intégrant par parties. □ *

*We thank Adri Olde-Daalhuis from the University of Edinburgh, who drew our attention to the "magic formula", and Bernard Candelpergher from the University of Nice, who explained to us its relation with the Taylor expansion with integrale remainder of the generating function of X_n.

Introduction de la variable “figée” κ et de la fonction $\kappa(n,x)$.

- Posons $\boxed{\kappa(n,x) = \{h^{(n)}(x)\} = \{np^{(n)} + x\sigma^{(n)}\sqrt{n}\}.}$; cette fonction concentre le “défaut de développabilité” de $k(n,x)$.

- Considérons les fonction $\overline{k}^{(n)}$ et $\overline{F}^{(n)}$ de (n,κ) suivantes :

$$\overline{k}^{(n)}(x,\kappa) := np^{(n)} + x\sigma^{(n)}\sqrt{n} - \kappa$$

$$\overline{F}^{(n)}(x,\kappa) := (n-\overline{k}) \binom{n}{\overline{k}} \int_{p^{(n)}}^{1} v^{\overline{k}}(1-v)^{n-\overline{k}-1} dv \text{ , avec } \overline{k} := \overline{k}^{(n)}(x,\kappa).$$

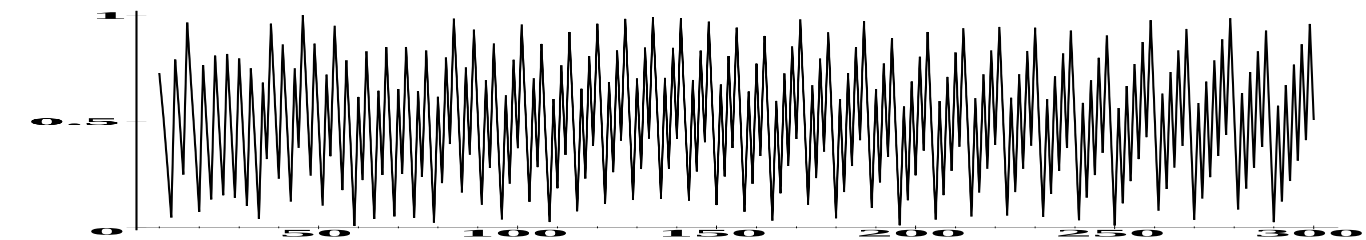
- Ainsi, nous avons les relations :

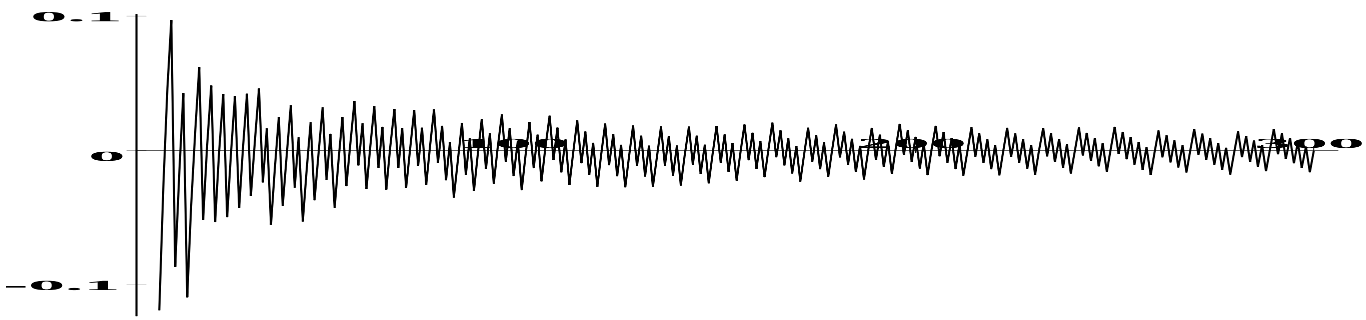
$$k(n,x) = \overline{k}^{(n)}(x,\kappa(n,x)) \text{ , } \Big(= h^{(n)}(x) - \kappa(n,x)\Big)$$

$$F_n(x) = \overline{F}^{(n)}(x,\kappa(n,x)).$$

- L’introduction de ces fonctions de κ est le point clè pour le d.a. de $F_n(x)$.

Relation entre $\kappa(n,x)$ et l'irrégularité de $F_n(x) - \mathcal{N}(x)$





Values of the function $\kappa(n,x)$ (top) and the error $F_n(x) - \mathcal{N}(x)$ (bottom), for $\boxed{x = 0.8}$, n between 10 and 300, and $\boxed{p^{(n)} = \frac{1}{2} + \frac{5}{4}\frac{1}{\sqrt{n}}}$. Observe that $\kappa(n,x)$ has no limit, and the error tends to zero like $\frac{1}{\sqrt{n}}$, with oscillations related to those of $\kappa(n,x)$.

Le théorème

Théorème 2 *Assume $p^{(n)}$ admits an a.e. to any order i_0, such that* $\boxed{p_0 \in (0,1)}$.

$$p^{(n)} = p_0 + \frac{p_1}{\sqrt{n}} + \frac{p_2}{n} + \ldots + \frac{p_{i_0}}{(\sqrt{n})^{i_0}} + O\left(\frac{1}{(\sqrt{n})^{i_0+1}}\right).$$

Let $\sigma^{(n)} := \sqrt{p^{(n)}(1-p^{(n)})}$ *and* $h^{(n)}(x) := np^{(n)} + x\sigma^{(n)}\sqrt{n}$. *Let* $F_n(x)$ *be the p.d.f. of* X_n *given by*

$$F_n(x) := \sum_{j=0}^{k(n,x)} \left(\begin{array}{c} n \\ j \end{array}\right) \left(p^{(n)}\right)^j \left(1-p^{(n)}\right)^{n-j},$$

where $k(n,x) := [h^{(n)}(x)]$ *is the integer part of* $h^{(n)}(x)$. *Then there exists a family of functions* $\varphi_1(n,x)$, $\varphi_2(n,x)$, ... *that stay bounded (but have no limit) when* n *tends to infinity, such that, for any* i_0 *and all* x *in any compact* $\mathcal{X}$

$$F_n(x) = \mathcal{N}(x) + \frac{\boxed{\varphi_1(n,x)}}{\sqrt{n}} + \frac{\boxed{\varphi_2(n,x)}}{n} + \ldots + \frac{\boxed{\varphi_{i_0}(n,x)}}{(\sqrt{n})^{i_0}} + O\left(\frac{1}{(\sqrt{n})^{i_0+1}}\right)$$

The coefficients φ_i of this expansion are defined in the following way : let $\kappa(n,x) := \{h^{(n)}(x)\}$ be the fractional part of $h^{(n)}(x)$. Then the fonction $\overline{F}^{(n)}(x,\kappa)$ defined by

$$\overline{F}^{(n)}(x,\kappa) := (n-\overline{k})\begin{pmatrix} n \\ \overline{k} \end{pmatrix}\int_{p^{(n)}}^{1} v^{\overline{k}}(1-v)^{n-\overline{k}-1}dv,$$

where $\overline{k} = \overline{k}^{(n)}(x,\kappa) := np^{(n)} + x\sigma^{(n)}\sqrt{n} - \kappa$, admits an asymptotic expansion in powers of $\frac{1}{\sqrt{n}}$ whose coefficients are polynomial functions of x and κ and which is uniformly valid on any compact $\mathcal{X}\times\mathcal{K} \subset \mathbf{R}_x\times\mathbf{R}_\kappa$:

$$\overline{F}_n(x,\kappa) = \mathcal{N}(x) + \frac{\overline{\varphi}_1(x,\kappa)}{\sqrt{n}} + \frac{\overline{\varphi}_2(x,\kappa)}{n} + \ldots + \frac{\overline{\varphi}_{i_0}(x,\kappa)}{(\sqrt{n})^{i_0}} + O\left(\frac{1}{(\sqrt{n})^{i_0+1}}\right).$$

We have $F_n(x) = \overline{F}^{(n)}(x,\kappa(n,x))$ and, for all i, $\varphi_i(n,x) = \overline{\varphi}_i(x,\kappa(n,x))$. The asymptotic expansion of $\overline{F}^{(n)}(x,k)$ can be obtained by the Laplace method.

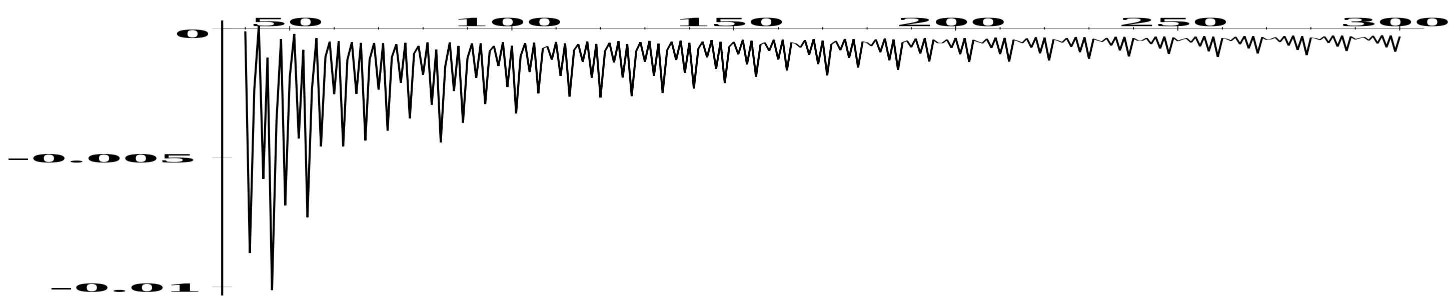
Application du théorème

Applying theorem **??** and using `Maple` gives ($\sigma_0 = \sqrt{p_0(1-p_0)}$) :

$$\overline{\varphi}_1(x,\kappa) = \frac{n(x)}{6\sigma_0}((2p_0-1)(x^2-1)+3(1-2\kappa))$$

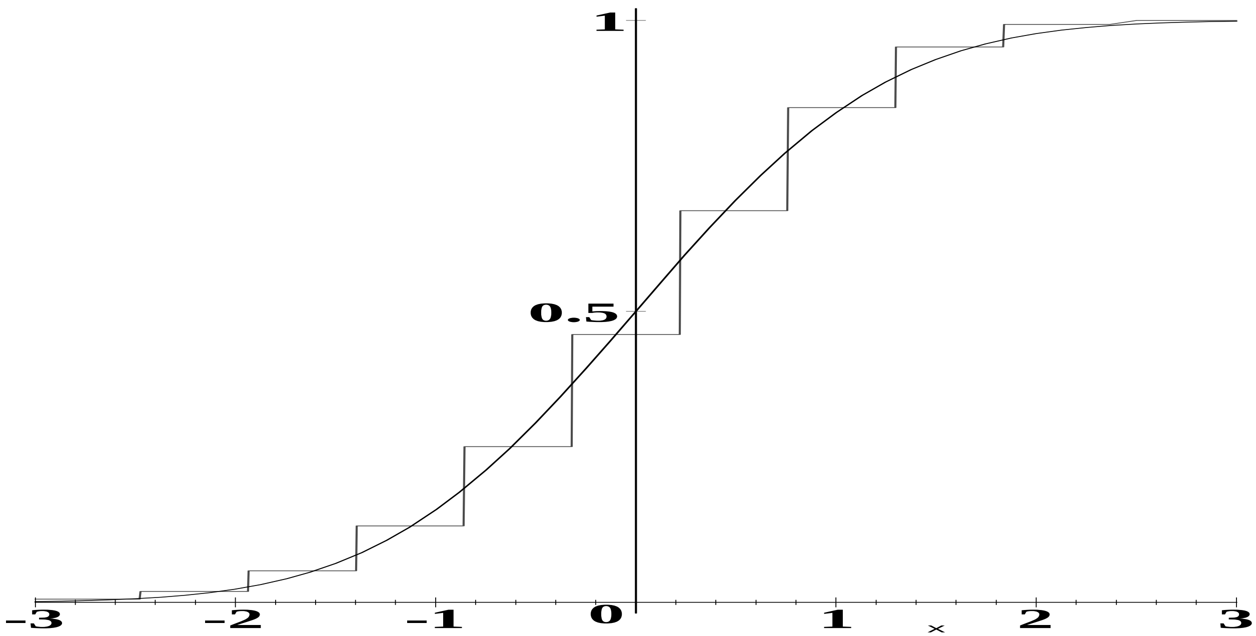
, with $n(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, and

$$\overline{\varphi}_2(x,\kappa) = \frac{n(x)}{72(p_0\sigma_0)^{3/2}}\Big(\sigma_0 x^5(2p_0-1)^2 - \sigma_0 x^3(12\kappa(2p_0-1)+ \\ +22p_0^2 - 34p_0 + 13) + 6\sigma_0 x(6\kappa(\kappa+2p_0-2) - p_0^2 - 7p_0 + 5) + \\ +12p_1(3\kappa(2p_0-1)+(2-3p_0))\Big)\,.$$

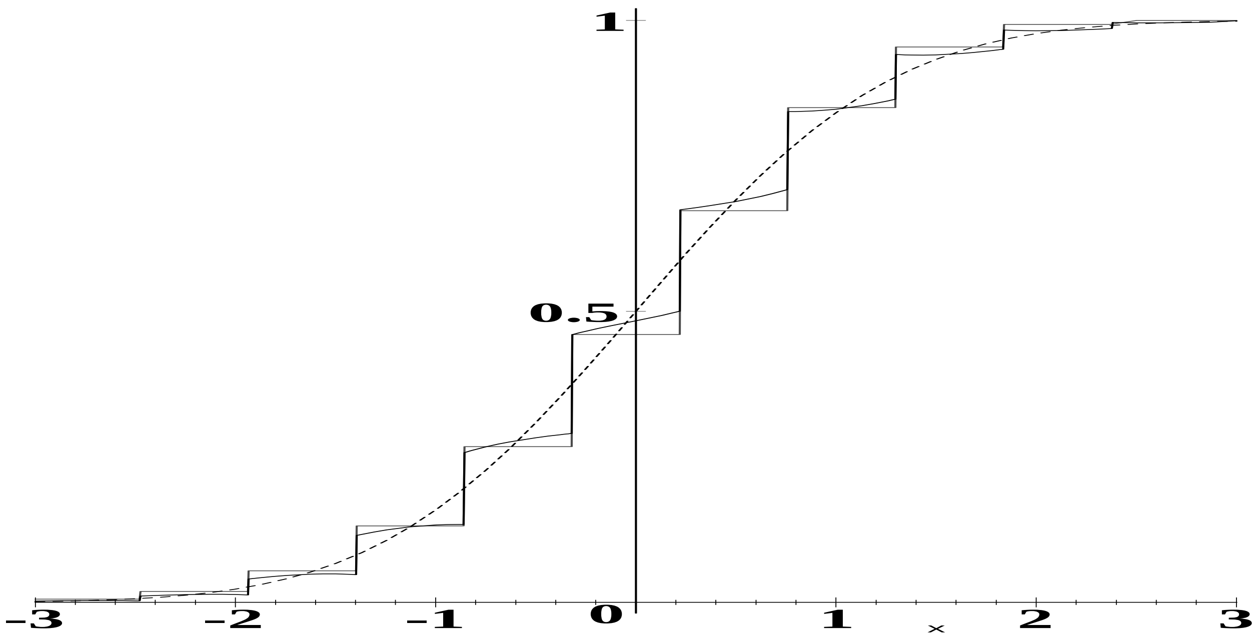


The error $F_n(x) - \mathcal{N}(x) - \frac{\varphi_1(n,x)}{\sqrt{n}}$, for $x = 0.8$, and $p^{(n)} = \frac{1}{2} + \frac{5}{4}\frac{1}{\sqrt{n}}$.

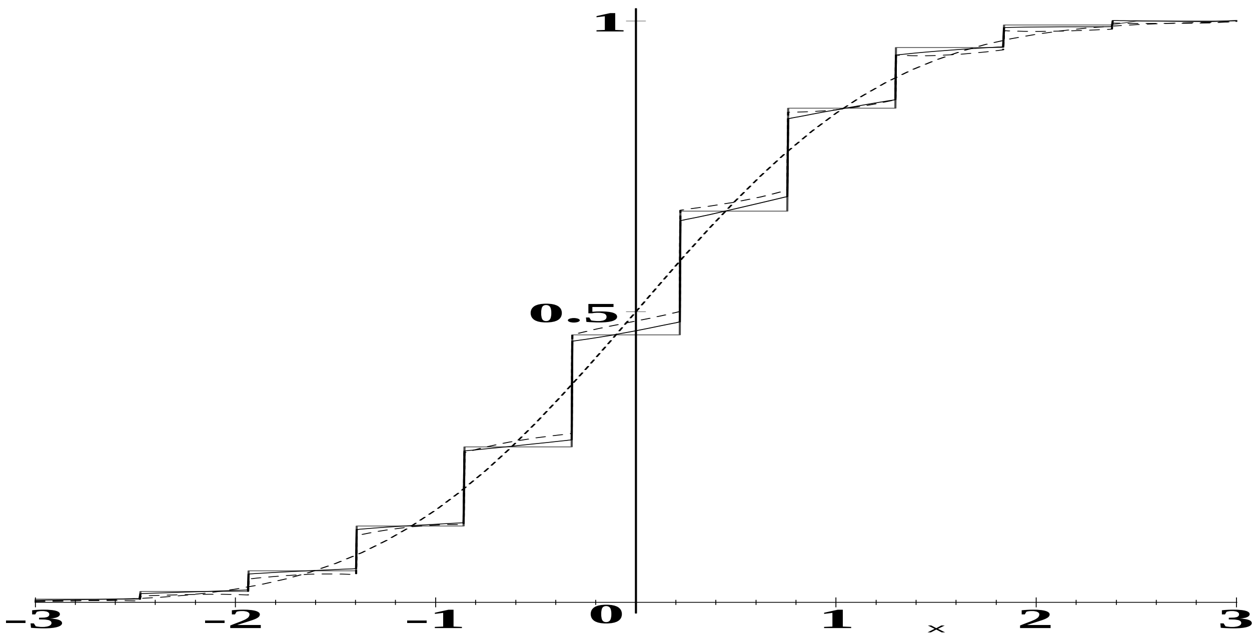
La fonction de répartition $F_n(x)$ et son approximation à l'ordre 0



La fonction de répartition $F_n(x)$ et son approximation à l'ordre 1



La fonction de répartition $F_n(x)$ et son approximation à l'ordre 2



Preuve de l'existence du d.a. : décomposition en deux facteurs

$$\overline{F}^{(n)}(x,\kappa) = C^{(n)}(x,\kappa) I^{(n)}(x,\kappa)$$

$$C^{(n)}(x,\kappa) \;:=\; (n-\overline{k}) \binom{n}{\overline{k}} (p^{(n)})^{\overline{k}} (1-p^{(n)})^{n-\overline{k}-1} \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ , et}$$

$$I^{(n)}(x,\kappa) \;:=\; \int_0^{q^{(n)}} \left(1+\frac{u}{p^{(n)}}\right)^{\overline{k}} \left(1-\frac{u}{1-p^{(n)}}\right)^{n-\overline{k}-1} \sqrt{n} du \text{ ,}$$

avec $\overline{k} := \overline{k}^{(n)}(x,\kappa)$.

La développabilité de $C^{(n)}$ se déduit de la formule de Stirling (développement de $\Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} u^n e^{-u} du$).

Localisation de l'intégration

$$\tilde{I}^{(n)}(x,\kappa) := I^{(n)}(x,\kappa) - \int_{u_n}^{q^{(n)}} \theta^{(n)}(u,x,\kappa)du = \int_0^{u_n} \theta^{(n)}(u,x,\kappa)du.$$

Les d.a. sont effectués dans $\mathcal{L}^{\infty}_{\mathcal{X}\times\mathcal{K}}$ espace de fonctions continues sur le compact $\mathcal{X}\times\mathcal{K} = \mathcal{X}\times[0,1]$, normé par $\|f\|^{\infty}_{\mathcal{X}\times\mathcal{K}} := \text{Sup}_{(x,\kappa)\in\mathcal{X}\times\mathcal{K}}|f(x,\kappa)|$.

Lemme 3 *There exists a sequence of real numbers* $u_n \in [0, q^{(n)}]$ *s. t.*

1. $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$,

2. $\overset{\circ}{I}^{(n)}(x,\kappa) := \int_{u_n}^{q^{(n)}} \theta^{(n)}(u,x,\kappa)du = \boxed{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\infty}}$,

3. *For* $\boxed{V_n := x - \sqrt{n}\frac{u_n}{\sigma^{(n)}}}$, $e^{-V_n^2} = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\infty}$, *and* $\lim_{n\to\infty} V_n = -\infty$ *in* $\mathcal{L}^{\infty}_{\mathcal{X}\times\mathcal{K}}$.

Méthode de Laplace

Puis on étire le domaine d'intégration autour du maximum de l'argument de exp : on pose

$$u = \varepsilon\sigma^{(n)}(x - V) \text{ , avec } \varepsilon := 1/\sqrt{n}.$$

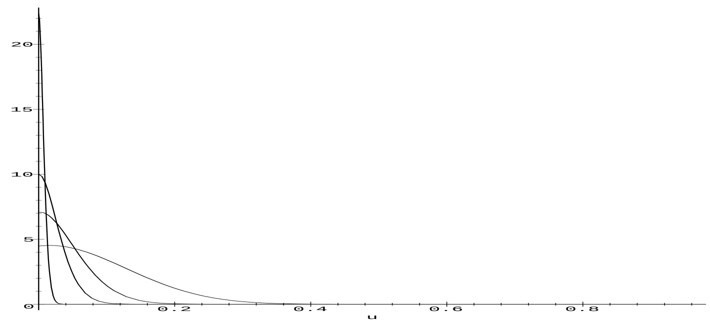
$$\begin{aligned} \tilde{I}^{(n)}(x,\kappa) &= \sigma^{(n)} \int_{V_n}^{x} \left(1 + \varepsilon \frac{\sigma^{(n)}(x-V)}{p^{(n)}}\right)^{\overline{k}} \left(1 - \varepsilon \frac{\sigma^{(n)}(x-V)}{q^{(n)}}\right)^{n-\overline{k}-1} dV \\ &=: \sigma^{(n)} \int_{V_n}^{x} \Theta^{(n)}(V,x,\kappa) e^{-\frac{1}{2}V^2} dV \text{ , with} \end{aligned}$$

$$\ln \Theta^{(n)}(V,x,\kappa) = \frac{x^2}{2} + \beta\left(\varepsilon, \varepsilon\sigma^{(n)}(x-V), V, x, \kappa\right),$$

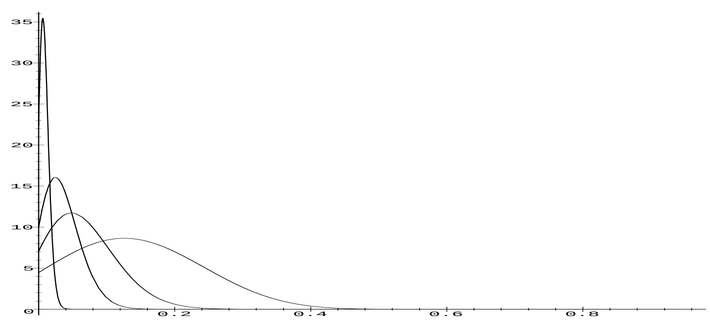
$$\beta(\varepsilon,u,V,x,\kappa) = (x-V)^2\beta_1(\varepsilon,u) + x(x-V)\beta_2(\varepsilon,u) + \kappa\beta_3(\varepsilon,u) + \beta_4(\varepsilon,u)$$

avec les $\beta_i(\varepsilon,u)$ tels $\beta_i(0,0) = 0$, à d.a. convergeant asymptotiquement, uniformément dèslors que $u \in [0, u_n]$.

Tracé de l'intégrant



$x = 0$



$x = 1$

Résumé de la méthode pratique de Laplace

· Compute the formal $\frac{1}{\sqrt{n}}$-expansion $\widehat{L}^{(n)}(V,x,\kappa)$ of $\ln \Theta^{(n)}(V,x,\kappa)$

$$\begin{aligned}\ln \Theta^{(n)}(V,x,\kappa) \; := \; & \frac{1}{2}V^2 + \; \overline{k}^{(n)}(x,\kappa) \ln \left(1+\varepsilon \frac{\sigma^{(n)}(x-V)}{p^{(n)}}\right) + \\ & + \left(n - \overline{k}^{(n)}(x,\kappa) - 1\right) \ln \left(1-\varepsilon \frac{\sigma^{(n)}(x-V)}{q^{(n)}}\right)\end{aligned}$$

dealing with (V,x,κ) as with constants. You get

$$\widehat{L}^{(n)}(V,x,\kappa) = \frac{x^2}{2} + L_1(V,x,\kappa)\frac{1}{\sqrt{n}} + L_2(V,x,\kappa)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 + \dots$$

where the L_is are polynomial functions.

· Compute the formal expansion $\widehat{G}^{(n)}(V,x,\kappa)$ of $\sigma^{(n)} e^{\widehat{L}^{(n)}(V,x,\kappa)}$

$$\widehat{G}^{(n)}(V,x,\kappa) = e^{\frac{x^2}{2}}\left(1 + G_1(V,x,\kappa)\frac{1}{\sqrt{n}} + G_2(V,x,\kappa)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 + \dots\right).$$

$$\cdot \quad \widehat{I}^{(n)}(x,\kappa) = \int_{-\infty}^{x} \widehat{G}(V,x,\kappa) e^{-\frac{1}{2}V^2} dV = \sum_{i \geq 0} \frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{(\sqrt{n})^i} \int_{-\infty}^{x} G_i(V,x,\kappa) e^{-\frac{1}{2}V^2} dV.$$