

TD2 : Équations Diophantiennes linéaires

Exercice 1 : Équations numériques

1. Résoudre les équations :

$$123x + 204y = 3, \quad 123x + 204y = 12, \quad 123x + 204y = 49$$

2. Résoudre l'équation : $6x = 12 \pmod{18}$.
3. Résoudre le système d'équations :

$$\begin{cases} x = 3 \pmod{11} \\ x = 1 \pmod{8} \end{cases}$$

Exercice 2 : Généralisation du théorème des restes chinois.

Soient m, n des entiers, d le $\text{pgcd}(m, n)$ et a, b des entiers. On considère le système d'équations :

$$\begin{cases} x = a \pmod{m} \\ x = b \pmod{n} \end{cases}$$

1. Montrer que si ce système a une solution alors $a = b \pmod{d}$.
2. Réciproquement, si $a = b \pmod{d}$ donner une solution du système et
3. Montrer que cette solution est unique modulo $\frac{mn}{d}$.
4. Résoudre les systèmes d'équations :

$$\begin{cases} x = 5 \pmod{12} \\ x = 7 \pmod{21} \end{cases} \quad \begin{cases} x = 5 \pmod{12} \\ x = 8 \pmod{21} \end{cases}$$

Exercice 3 : Équations Diophantiennes linéaires à trois inconnues

Soient a, b, c, d des entiers. On considère l'équation diophantienne $ax + by + cz = d$.

On va résoudre cette équation dans le cas où $\text{pgcd}(a, b) = 1$.

1. Donner une solution particulière de cette équation.
2. Résoudre l'équation $ax + by + cz = 0$.
3. En déduire toutes les solutions de $ax + by + cz = d$.
4. Résoudre l'équation $7x + 3y + 5z = 2$.

(Facultatif) On traite maintenant le cas général.

1. Se ramener au cas où $\text{pgcd}(a, b, c) = 1$.
2. On suppose que $\text{pgcd}(a, b, c) = 1$ et on pose $r = \text{pgcd}(a, b)$, $a' = \frac{a}{r}$, $b' = \frac{b}{r}$. Montrer qu'il existe un entier u tel que $cu = 1 \pmod{r}$.
3. Soit (x, y, z) une solution entière de $ax + by + cz = d$. Montrer que z est de la forme $du + rz'$, z' entier, et que $(x, y, z)'$ est solution de $a'x + b'y + cz' = d'$ où $d' = \frac{d(1-cu)}{r}$.
4. Résoudre l'équation $231x + 132y + 154z = 22$.
5. Écrire un programme Maple donnant les solutions du cas général.