

TD2 : Équations Diophantiennes linéaires Corrigé de l'exercice 3

Exercice 3 : Équations Diophantiennes linéaires à trois inconnues

Soient a, b, c, d des entiers. On considère l'équation diophantienne $ax + by + cz = d$.

On va résoudre cette équation dans le cas où $\text{pgcd}(a, b) = 1$.

1. Donner une solution particulière de cette équation.

Il existe des entiers u et v tels que $ua + vb = 1$ donc $x = ud, y = vd, z = 0$ est une solution particulière de cette équation.

2. Résoudre l'équation $ax + by + cz = 0$.

On résout l'équation $ax + by = -cz$. Une solution particulière est $x = -ucz, y = -vcz, z$ parcourant \mathbb{Z} . La solution générale est $x = -ucz + kb, y = -vcz + ka, z$ et k parcourant \mathbb{Z} .

3. En déduire toutes les solutions de $ax + by + cz = d$.

Si (x, y, z) est une solution de $ax + by + cz = d$ et $(x_0, y_0, z_0 = 0)$ la solution particulière trouvée en 1. alors $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ est une solution de $ax + by + cz = 0$, (x, y, z) est donc la somme de la solution particulière du 1. et de la solution générale du 2.

Soit $(x = u(d - cz) + kb, y = v(d - cz) - ka, z = z)$ où z et k parcourent \mathbb{Z} .

4. Résoudre l'équation $7x + 3y + 5z = 2$.

On applique la méthode des questions précédentes :

On a la relation de Bézout $7 \times 1 + 3 \times (-2) = 1$ d'où la solution particulière $x = 2, y = -4, z = 0^1$.

On résout $7x + 3y + 5z = 0$ ou encore $7x + 3y = -5z$.

La solution générale est $x = -5z + 3k, y = 10z - 7k, z$ et k parcourant \mathbb{Z} .

D'où la solution générale de $7x + 3y + 5z = 2$ est $(x = 2 - 5z + 3k, y = -4 + 10z - 7k, z = z)^2$ où z et k parcourent \mathbb{Z} .

(Facultatif) On traite maintenant le cas général.

1. Se ramener au cas où $\text{pgcd}(a, b, c) = 1$.

Comme dans le cas à deux inconnues si $\text{pgcd}(a, b, c)$ ne divise pas d il n'y a pas de solutions, sinon on pose $q = \text{pgcd}(a, b, c)$, $a' = \frac{a}{q}$, $b' = \frac{b}{q}$, $c' = \frac{c}{q}$, $d' = \frac{d}{q}$. Les équations $ax + by + cz = d$ et $a'x + b'y + c'z = d'$ ont les mêmes solutions et $\text{pgcd}(a', b', c') = 1$.

2. On suppose que $\text{pgcd}(a, b, c) = 1$ et on pose $r = \text{pgcd}(a, b)$, $a' = \frac{a}{r}$, $b' = \frac{b}{r}$. Montrer qu'il existe un entier u tel que $cu = 1 \pmod{r}$.

$\text{pgcd}(a, b, c) = 1 = \text{pgcd}(\text{pgcd}(a, b), c) = \text{pgcd}(c, r)$. Il existe donc des entiers u et v tels que $cu + rv = 1$.

3. Soit (x, y, z) une solution entière de $ax + by + cz = d$. Montrer que z est de la forme $du + rz'$, z' entier, et que (x, y, z') est solution de $a'x + b'y + cz' = d'$ où $d' = \frac{d(1-cu)}{r}$.

Comme (x, y, z) vérifie $ax + by + cz = d$ et r est le $\text{pgcd}(a, b)$ on a $cz = d \pmod{r}$

d'où $z = du \pmod{r}$ ou encore $z = du + rz'$.

Alors $ax + by + cz = d$ devient $ax + by + c(du + rz') = d$ ou encore $ax + by + crz' = d(1 - cu)$.

On sait que r divise a, b, cr et $1 - cu$ (cf 2.), on a donc $a'x + b'y + cz' = d \frac{(1-cu)}{r}$.

Comme $\text{pgcd}(a', b') = 1$ on peut appliquer la méthode de la première partie.

¹Dans un cas aussi simple quelques essais intuitifs donnent des solutions particulières évidentes comme $x = 1, y = 0, z = -1$ ou $x = 0, y = -1, z = 1$. Le but est de voir fonctionner sur ce cas simple une méthode qui marchera pour tout a, b, c, d avec $\text{pgcd}(a, b) = 1$. Pouvez-vous proposer une solution évidente de l'équation $3921x + 7409y + 2655z = 7163$?

²D'autres choix dans la résolution, par exemple on peut commencer par remarquer que $\text{pgcd}(b, c) = 1$ conduiront à d'autres paramétrages des solutions. Essayer ce que donne la commande `isolve` sur cette équation. Comment s'assurer qu'on décrit bien le même ensemble de solutions ?

4. Résoudre l'équation $231x + 132y + 154z = 22$.

On constate que $\text{pgcd}(231, 132, 154) = 11$ et divise 22. Il y a des solutions et ce sont les mêmes que celles de l'équation $21x + 12y + 14z = 2$. On va donc résoudre cette dernière.

On pose $r = \text{pgcd}(21, 12) = 3$. On calcule la relation de Bézout $\text{pgcd}(14, 3) = 1 = 14 \times (-1) + 3 \times 5$, d'où $14 \times (-1) = 1 \pmod{3}$.

En posant $z = 2 \times (-1) + 3z'$ l'équation $21x + 12y + 14z = 2$ devient $21x + 12y + 14(2 \times (-1) + 3z') = 2$ ou encore $21x + 12y + 14 \times 3z' = 2(1 - 14 \times (-1))$ qui devient $7x + 4y + 14z' = 10$ en divisant par $r = 3$. On peut alors résoudre cette équation par la méthode de la première partie.

On a la relation de Bézout $7 \times (-1) + 4 \times 2 = 1$ d'où la solution particulière $x = -10, y = 20, z' = 0$.

On résoud $7x + 4y + 14z' = 0$ ou encore $7x + 4y = -14z'$.

La solution générale est $x = 14z' + 4k, y = -28z' - 7k, z'$ et k parcourant \mathbb{Z} .

D'où la solution générale de $7x + 4y + 14z' = 10$ est $(x = -10 + 14z' + 4k, y = 20 - 28z' - 7k, z' = z')$

où z' et k parcourent \mathbb{Z} . Et enfin la solution générale de $231x + 132y + 154z = 22$ est

$(x = -10 + 14z' + 4k, y = 20 - 28z' - 7k, z = -2 + 3z')$ où z' et k parcourent \mathbb{Z} .

OUF!

5. Écrire un programme Maple donnant les solutions du cas général.

Si vous êtes arrivé(e)s jusque là dans la lecture et que vous aimez programmer, c'est facile.

Faites une première fonction qui traite le cas où $\text{pgcd}(a, b) = 1$ (première partie) et une deuxième fonction qui traite le cas général en se ramenant à ce cas-là, donc en utilisant votre première fonction.