TD5 : Générateurs de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$

1. *Trouver un élément primitif de* $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$.
   On commençe par essayer 2.
   On sait que $2^{10} = 1 \pmod{11}$, donc l'ordre de 2 est un diviseur de 10.
   Or $2^2 = 4 \neq 1 \pmod{11}$ et $2^5 = 32 = 10 = -1 \pmod{11}$ donc 2 est d'ordre 10,
   2 est un élément primitif de $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$.

2. *Écrire* $(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^*$ *comme suite des puissances de cet élément.*
   $(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^* = \{2^0 = 2^{10} = 1, 2^1 = 2, 2^2 = 4, 2^3 = 8, 2^4 = 5, 2^5 = 10, 2^6 = 9, 2^7 = 7, 2^8 = 3, 2^9 = 6\}$
   On a bien tous les éléments non nuls de $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$.

3. *En déduire tous les éléments primitifs de* $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$.
   On sait que $\mathrm{ord}(2^k) = \frac{\mathrm{ord}(2)}{\mathrm{pgcd}(k,\mathrm{ord}(2))} = \frac{10}{\mathrm{pgcd}(k,10)}$ (TD4, exercice 7).
   Pour que 2^k soit primitif, c'est à dire d'ordre 10, il faut que $\mathrm{pgcd}(k, 10) = 1$.
   Les éléments primitifs sont donc $\{2, 2^3, 2^7, 2^9\} = \{2, 6, 7, 8\}$.
   On remarque qu'il y en a $\varphi(11-1) = \varphi(10) = 4$.

4. *En déduire l'ordre de tous les éléments de* $(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^*$.
   Constater que le nombre d'éléments d'ordre d *est* $\varphi(d)$.
   On applique la formule $\mathrm{ord}(2^k) = \frac{\mathrm{ord}(2)}{\mathrm{pgcd}(k,\mathrm{ord}(2))}$:

Élément	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
représenté par 2^k	2^0	2^1	2^8	2^2	2^4	2^9	2^7	2^3	2^6	2^5
$\mathrm{pgcd}(k, 10)$	10	1	2	2	2	1	1	1	2	5
ordre	1	10	5	5	5	10	10	10	5	2

   On constate qu'on a bien 1 élément d'ordre 1, 1 d'ordre 2, 4 d'ordre 5, 4 d'ordre 10.