


```

1
-22
[ > 'a'=a, 'b'=b, 'u'=u, 'v'=v, 'au+bv'=a*u+b*v;
a = 1234, b = 56, u = 1, v = -22, au + bv = 2

```

Remarquez que les '...' empêchent l'évaluation.

Nombres contenant des racines :

```

[ > a:=(2+3*sqrt(5))^12;
a := (2 + 3√5)12
[ > expand(a);
95144562001 + 42496880328√5
[ > evalf(a);
0.1901704756 1012
[ > a:=(2+3*(5)^(1/5))^12;
a := (2 + 3 5(1/5))12
[ > expand(a);
512899336 + 321912648 5(1/5) + 291030921 5(2/5) + 262856880 5(3/5)
+ 183474720 5(4/5)
[ > evalf(a);
0.2866368549 1010

```

Ils ne sont pas automatiquement développés, expand produit un résultat exact et laisse donc des racines, evalf un résultat approché dont on va voir qu'on peut choisir le nombre de chiffres.

Exercice 3 : Eliminez les racines au dénominateur dans $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$ et $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}$. Vous pouvez consulter l'aide de la fonction rationalize.

Solution

```

[ > ?rationalize
On multiplie par la quantité conjuguée :
[ > rationalize(1/(sqrt(2)+sqrt(3)));
-√2 + √3
Sauriez-vous faire celui-là à la main ? Il faut deux étapes.
[ > rationalize(1/(sqrt(2)+sqrt(3)+sqrt(5)));
1/12 (√2 + √5 - √3)(-2 + √2√5)

```

```
[ > ?constants;
```

Les constantes connues de Maple mais pas forcément de vous. Si vous voulez savoir ce qu'est gamma tapez ?gamma

```
[ > Pi;
π
```

Attention de ne pas confondre Pi qui est le nombre π et pi qui est une variable π comme on peut avoir une variable α .

```
[ > exp(I*Pi);
-1
```

Maple connaît des choses sur les complexes.

```
[ > evalf(Pi);  
3.141592654
```

Où l'on voit que c'est le nombre.

```
[ > evalf(Pi,100);  
3.141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944592307\  
816406286208998628034825342117068
```

Remarquez qu'on peut régler le nombre de chiffres utilisés dans les calculs flottants.

Exercice 4 : Est-ce que $e^{(\pi\sqrt{163})} = 262537412640768744$?

Solution

Evaluons l'ordre de grandeur

```
[ > evalf(exp(Pi*sqrt(163)));  
0.2625374097 1018
```

Donc 18 chiffres avant la virgule

```
[ > evalf(exp(Pi*sqrt(163))-262537412640768744);  
0
```

On n'a pas assez de chiffres significatifs pour que le résultat veuille dire grand chose.

Essayons avec plus de chiffres :

```
[ > evalf(exp(Pi*sqrt(163))-262537412640768744,20);  
0  
[ > evalf(exp(Pi*sqrt(163))-262537412640768744,25);  
0
```

Ces deux nombres coïncident sur 25 chiffres !

```
[ > evalf(exp(Pi*sqrt(163))-262537412640768744,30);  
0.24 10-10
```

Ce n'est pas encore probant car les derniers chiffres d'un calcul approché sont souvent faux.

```
[ > evalf(exp(Pi*sqrt(163))-262537412640768744,35);  
-0.75020 10-12
```

Donc ces deux nombres ont 18 chiffres avant la virgule et coïncident jusqu'à 12 chiffres après la virgule.

Les flottants sont contagieux :

```
[ > 1/3+1/3+1/3;  
1
```

mais

```
[ > 1.0/3+1/3+1/3;  
0.9999999999
```

il a suffi qu'un des nombres soit approché pour que tout le calcul se fasse de manière approchée.

Polynômes

```
[ > a:=(2+3*x)^12;  
a := (2 + 3 x)12
```

```
[ > b:=expand(a);  
b := 4096 + 73728 x + 608256 x2 + 3041280 x3 + 10264320 x4 + 24634368 x5
```

$$+ 43110144 x^6 + 55427328 x^7 + 51963120 x^8 + 34642080 x^9 + 15588936 x^{10} \\ + 4251528 x^{11} + 531441 x^{12}$$

> factor(b) ;

$$(2 + 3x)^{12}$$

Ce polynôme est plus simple factorisé.

> factor(x^100-1) ;

$$(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^{20}+x^{15}+x^{10}+x^5+1)(x+1)(1-x+x^2-x^3+x^4) \\ (1-x^5+x^{10}-x^{15}+x^{20})(1+x^2)(x^8-x^6+x^4-x^2+1)(x^{40}-x^{30}+x^{20}-x^{10}+1)$$

Ce polynôme est plus simple développé. Simplifier un polynôme n'est ni le développer, ni le factoriser : ça dépend.

> p1:=randpoly(x);p2:=randpoly(x);p3:=randpoly(x);p4:=expand(p1*p2);p5:=expand(p1*p3);

$$p1 := -85 x^5 - 55 x^4 - 37 x^3 - 35 x^2 + 97 x + 50$$

$$p2 := 79 x^5 + 56 x^4 + 49 x^3 + 63 x^2 + 57 x - 59$$

$$p3 := 45 x^5 - 8 x^4 - 93 x^3 + 92 x^2 + 43 x - 62$$

$$p4 := -2873 x + 10744 x^2 + 8749 x^3 + 6484 x^4 + 7216 x^5 - 4420 x^6 - 12887 x^7 - 10168 x^8 \\ - 9105 x^9 - 6715 x^{10} - 2950$$

$$p5 := -3864 x + 10941 x^2 + 5063 x^3 - 10822 x^4 + 4230 x^5 - 629 x^6 - 3984 x^7 + 6680 x^8 \\ - 1795 x^9 - 3825 x^{10} - 3100$$

Trois polynômes au hasard, puis deux polynômes qui ont p1 en facteur commun.

> gcd(p4,p5);gcdex(p4,p5,x,'u','v');

$$85 x^5 + 55 x^4 + 37 x^3 + 35 x^2 - 97 x - 50$$

$$x^5 + \frac{11}{17} x^4 + \frac{37}{85} x^3 + \frac{7}{17} x^2 - \frac{97}{85} x - \frac{10}{17}$$

Comme sur les entiers le pgcd, le pgcd et les coefficients de Bézout dans u et v.

Remarquez que le pgcd de polynômes est déterminé à constante multiplicative près.

> 'u'=u,'v'=v,'u*p4+v*p5'=expand(u*p4+v*p5);

$$u = -\frac{4606008541753027}{138776685196813932765} - \frac{15834226499548664}{138776685196813932765} x$$

$$+ \frac{6076589685657958}{46258895065604644255} x^2 - \frac{1919462681347958}{138776685196813932765} x^3 - \frac{47351794362681}{544222294889466403} x^4,$$

$$v = \frac{1806851412364163}{8163334423341996045} + \frac{918195971903987}{3965048148480398079} x + \frac{10427498514445582}{46258895065604644255} x^2$$

$$+ \frac{4432905488310170}{27755337039362786553} x^3 + \frac{1246930584883933}{8163334423341996045} x^4,$$

$$u p4 + v p5 = x^5 + \frac{11}{17} x^4 + \frac{37}{85} x^3 + \frac{7}{17} x^2 - \frac{97}{85} x - \frac{10}{17}$$

Remarquez la taille des coefficients de u et v.

Exercice 5 : Faire quelques essais et donner une hypothèse sur ce que vaut pgcd($x^m - 1$, $x^n - 1$).

Solution

```
> gcd(x^8-1, x^6-1);  
x^2-1  
> gcd(x^21-1, x^35-1);  
x^7-1  
etc... pgcd(x^m-1, x^n-1) vaut xpgcd(m,n)-1.
```

```
> solve(x^3+x+5);  
-1/6 (540 + 12 sqrt(2037))^(1/3) + 2/(540 + 12 sqrt(2037))^(1/3), 1/12 (540 + 12 sqrt(2037))^(1/3)  
- 1/(540 + 12 sqrt(2037))^(1/3) + 1/2 I sqrt(3) (-1/6 (540 + 12 sqrt(2037))^(1/3) - 2/(540 + 12 sqrt(2037))^(1/3))  
1/12 (540 + 12 sqrt(2037))^(1/3) - 1/(540 + 12 sqrt(2037))^(1/3)  
- 1/2 I sqrt(3) (-1/6 (540 + 12 sqrt(2037))^(1/3) - 2/(540 + 12 sqrt(2037))^(1/3))
```

Les trois racines exactes séparées par des virgules. Remarquez les notations introduites par Maple %1, %2 pour raccourcir l'affichage.

```
> fsolve(x^3+x+5);  
-1.515980228
```

Les racines réelles approchées.

```
> fsolve(x^3+x+5, x, complex);  
-1.515980228, 0.7579901138 - 1.650347551 I, 0.7579901138 + 1.650347551 I
```

Toutes les racines approchées.

```
> solve(p1);  
RootOf(85 _Z^5 + 55 _Z^4 + 37 _Z^3 + 35 _Z^2 - 97 _Z - 50)
```

Il n'y a pas de formule pour les racines exactes. On verra plus tard ce que l'on peut faire d'un tel objet.

Analyse

```
> a:=diff(ln(x/(x^2+1)), x); simplify(a);  
a := (1/(x^2+1) - 2*x^2/(x^2+1)^2) / (x^2+1)  
- (x^2-1) / (x(x^2+1))
```

La dérivée, remarquez qu'elle n'est pas donnée sous forme simplifiée.

```
> b:=diff(ln(x/(x^2+1)), x, x, x); simplify(b);
```

$$b := \frac{\left(48 \frac{x^2}{(x^2+1)^3} - \frac{6}{(x^2+1)^2} - 48 \frac{x^4}{(x^2+1)^4}\right)(x^2+1)}{x}$$

$$-2 \frac{\left(-6 \frac{x}{(x^2+1)^2} + 8 \frac{x^3}{(x^2+1)^3}\right)(x^2+1)}{x^2} - 24 \frac{x}{(x^2+1)^2} + 32 \frac{x^3}{(x^2+1)^3}$$

$$+ 2 \frac{\left(\frac{1}{x^2+1} - 2 \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\right)(x^2+1)}{x^3} - 2 \frac{\frac{1}{x^2+1} - 2 \frac{x^2}{(x^2+1)^2}}{x}$$

$$- 2 \frac{x^6 - 9x^4 - 3x^2 - 1}{x^3(x^2+1)^3}$$

La dérivée troisième.

```
> diff(f(x/(x^2+1)), x, x);
```

$$(D^{(2)})(f)\left(\frac{x}{x^2+1}\right)\left(\frac{1}{x^2+1} - 2 \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\right)^2 + D(f)\left(\frac{x}{x^2+1}\right)\left(-6 \frac{x}{(x^2+1)^2} + 8 \frac{x^3}{(x^2+1)^3}\right)$$

Elle peut être abstraite.

```
> int(x/(x^3+1), x=0..3); int(x/(x^3+1), x=1..m); int(x/(x^3+1), x);
```

$$-\frac{2}{3} \ln(2) + \frac{1}{6} \ln(7) + \frac{1}{3} \sqrt{3} \arctan\left(\frac{5}{3} \sqrt{3}\right) + \frac{1}{18} \sqrt{3} \pi$$

$$-\frac{1}{3} \ln(m+1) + \frac{1}{6} \ln(m^2 - m + 1) + \frac{1}{3} \sqrt{3} \arctan\left(\frac{1}{3} \sqrt{3} (2m - 1)\right) + \frac{1}{3} \ln(l+1) - \frac{1}{6} \ln(l^2 - l + 1)$$

$$-\frac{1}{3} \sqrt{3} \arctan\left(\frac{1}{3} \sqrt{3} (2l - 1)\right)$$

$$-\frac{1}{3} \ln(x+1) + \frac{1}{6} \ln(x^2 - x + 1) + \frac{1}{3} \sqrt{3} \arctan\left(\frac{1}{3} (2x - 1) \sqrt{3}\right)$$

Intégrale entre deux bornes concrètes, entre deux bornes abstraites et primitive.

```
> int(1/p1, x);
```

$$\sum_{-R} \ln(x)$$

$$\frac{584903642396728735186531993678661132953319434098}{15552826960092625873654443938384966675} -R^4$$

$$-\frac{25356966427812398773906460424698190417116934}{182974434824619127925346399275117255} -R^3$$

$$\begin{array}{r} \frac{19801828984457566621441949322931365569595156}{11893338263600243315147515952882621575} \quad -R^2 \\ \frac{522195571853043860745149803002847363466987}{202186750481204136357507771199004566775} \quad -R \\ \frac{40150581271303032722401751731200747823}{40437350096240827271501554239800913355} \end{array}$$

Et revoilà des RootOf car on ne peut pas calculer les racines exactes.

```
> int(exp(-x^3), x);
```

$$\int e^{-x^3} dx$$

L'explication, un peu compliquée, sera donnée en cours.

```
> taylor(sin(x), x=0, 18);
```

$$x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{362880}x^9 - \frac{1}{39916800}x^{11} + \frac{1}{6227020800}x^{13} - \frac{1}{1307674368000}x^{15} + \frac{1}{355687428096000}x^{17} + O(x^{18})$$

Un développement limité

```
> taylor(sin(x), x=1, 18);
```

$$\begin{aligned} & \sin(1) + \cos(1)(x-1) - \frac{1}{2}\sin(1)(x-1)^2 - \frac{1}{6}\cos(1)(x-1)^3 + \frac{1}{24}\sin(1)(x-1)^4 + \frac{1}{120}\cos(1)(x-1)^5 \\ & - \frac{1}{720}\sin(1)(x-1)^6 - \frac{1}{5040}\cos(1)(x-1)^7 + \frac{1}{40320}\sin(1)(x-1)^8 + \frac{1}{362880}\cos(1)(x-1)^9 \\ & - \frac{1}{3628800}\sin(1)(x-1)^{10} - \frac{1}{39916800}\cos(1)(x-1)^{11} + \frac{1}{479001600}\sin(1)(x-1)^{12} \\ & + \frac{1}{6227020800}\cos(1)(x-1)^{13} - \frac{1}{87178291200}\sin(1)(x-1)^{14} - \frac{1}{1307674368000}\cos(1)(x-1)^{15} \\ & + \frac{1}{20922789888000}\sin(1)(x-1)^{16} + \frac{1}{355687428096000}\cos(1)(x-1)^{17} + O((x-1)^{18}) \end{aligned}$$

En un autre point. Remarquez qu'il est écrit en puissances de (x-1) et qu'on a des sin(1) et des cos(1) car on n'en a pas de valeur exacte.

```
> taylor(sin(x), x=r, 18);
```

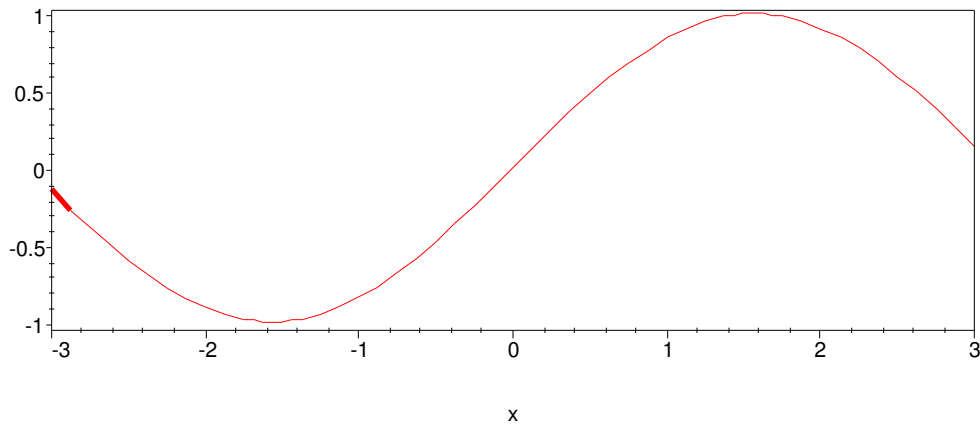
$$\begin{aligned} & \sin(r) + \cos(r)(x-r) - \frac{1}{2}\sin(r)(x-r)^2 - \frac{1}{6}\cos(r)(x-r)^3 + \frac{1}{24}\sin(r)(x-r)^4 + \frac{1}{120}\cos(r)(x-r)^5 \\ & - \frac{1}{720}\sin(r)(x-r)^6 - \frac{1}{5040}\cos(r)(x-r)^7 + \frac{1}{40320}\sin(r)(x-r)^8 + \frac{1}{362880}\cos(r)(x-r)^9 \\ & - \frac{1}{3628800}\sin(r)(x-r)^{10} - \frac{1}{39916800}\cos(r)(x-r)^{11} + \frac{1}{479001600}\sin(r)(x-r)^{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{6227020800} \cos(r) (x-r)^{13} - \frac{1}{87178291200} \sin(r) (x-r)^{14} - \frac{1}{1307674368000} \cos(r) \\
& (x-r)^{15} + \frac{1}{20922789888000} \sin(r) (x-r)^{16} + \frac{1}{355687428096000} \cos(r) (x-r)^{17} + \\
& O((x-r)^{18})
\end{aligned}$$

En un point quelconque.

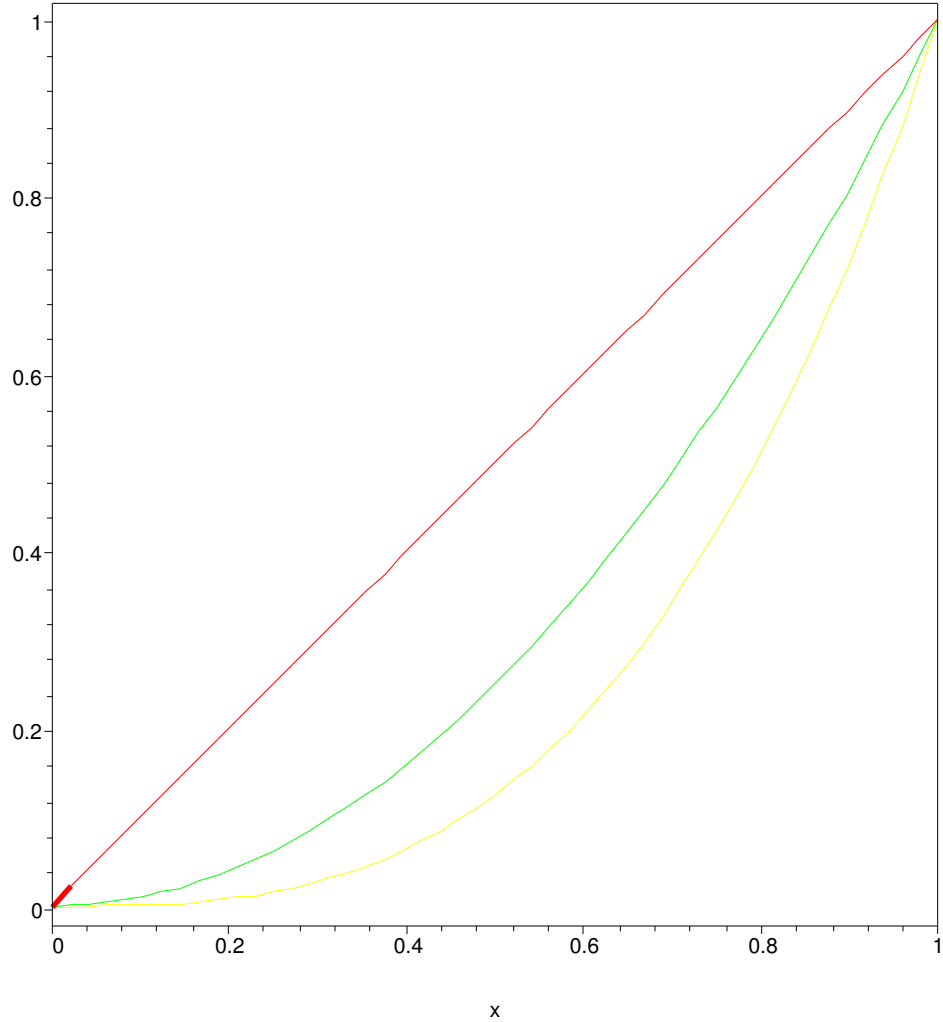
Graphiques

```
> plot(sin(x), x=-3..3);
```



Une courbe. Remarquez que quand vous cliquez dans le graphique, un menu spécial apparaît : tester les boutons de ce menu. De même un clic sur le bouton droit de la souris fait apparaître un menu spécial.

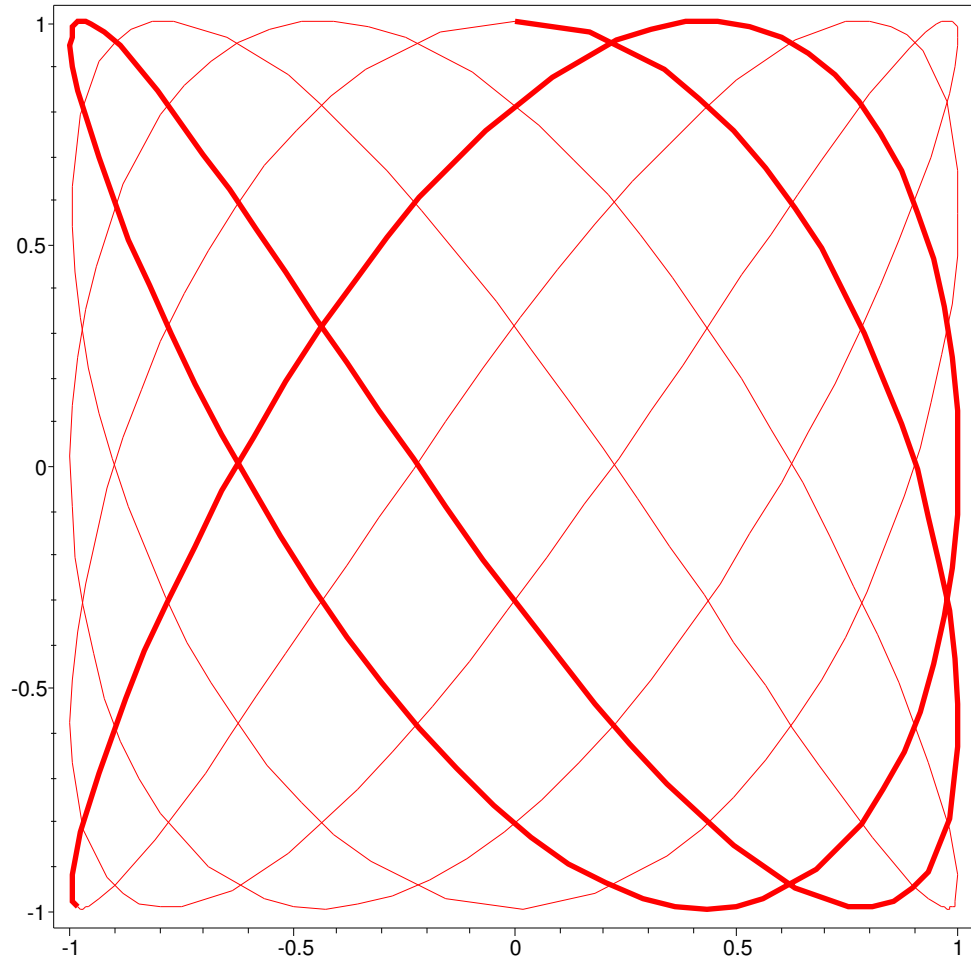
```
> plot([x, x^2, x^3], x=0..1);
```



Une famille de courbes.

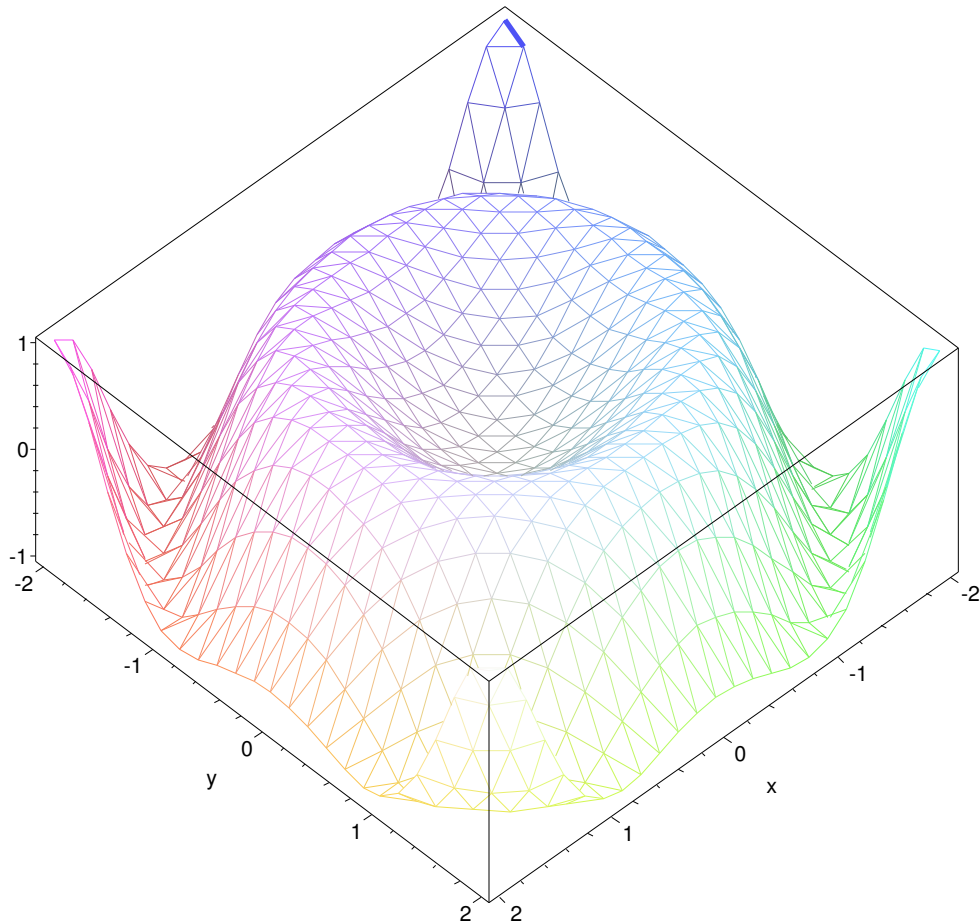
On peut changer les couleurs, mettre un titre, etc... plot a de nombreuses options : consulter ?plot.

```
> plot([sin(5*t),cos(7*t),t=0..2*Pi]);
```



Une courbe paramétrée $(x(t), y(t))$

```
> plot3d(sin(x^2+y^2), x=-2..2, y=-2..2); tester le menu obtenu en cliquant  
dans le graphique
```



Une surface que vous pouvez faire tourner en cliquant dedans et en bougeant la souris. On aussi un menu spécifique par clic sur le bouton droit.

[De nombreux graphiques spéciaux existent (animation, courbes dans l'espace, etc...). Ils sont rangés dans un librairie.

[> `?plots`

— Suite, listes et ensembles

[> `s:=1,x,x^3;s[2];`

$s := 1, x, x^3$
 x

Une suite est une suite d'objets séparés par des virgules. On accède aux éléments en mettant l'indice entre crochets.

[> `s:=seq(x^i,i=3..8);s[3];`

$s := x^3, x^4, x^5, x^6, x^7, x^8$
 x^5

Le constructeur de suite seq (sequence = suite en anglais) est très utile.

On peut aussi faire avec une boucle :

```
> s:=NULL;for i from 3 to 8 do s:=s,x^i od;
      s:=
      s:=x3
      s:=x3,x4
      s:=x3,x4,x5
      s:=x3,x4,x5,x6
      s:=x3,x4,x5,x6,x7
      s:=x3,x4,x5,x6,x7,x8
> L:=[x,y,xy,yx,x,xy];L[2];
      L:= [x, y, xy, yx, x, xy]
      y
```

L est une liste.

```
> ens:={x,y,xy,x,yx,xy};ens[3];
      e := {x, y, yx, xy}
      yx
```

ens est un ensemble. Remarquez que Maple l'ordonne comme il veut et supprime les doublons.

– Un exemple plus compliqué

On peut construire progressivement une expression compliquée : je veux tracer sin(x) et ses développements limités en zéro.

Je commence par essayer de tracer un développement limité :

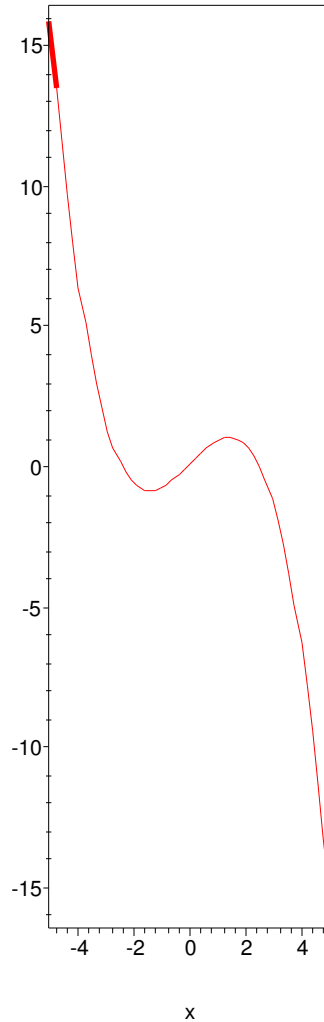
```
> dl:=taylor(sin(x),x=0,5);
      dl := x -  $\frac{1}{6}x^3 + O(x^5)$ 
> plot(dl,x=-5..5);
      Plotting error, empty plot
```

Eh oui : c'est le $O(x^5)$ qui pose problème.

```
> dl:=convert(taylor(sin(x),x=0,5),polynom);
      dl := x -  $\frac{1}{6}x^3$ 
```

convert est une fonction un peu fourre-tout qui permet de passer d'un type d'objet à un autre, par exemple de développement limité à polynôme.

```
> plot(dl,x=-5..5);
```



Ca marche !

```
> dls:=seq(convert(taylor(sin(x),x=0,i),polynom),i=3..20);
```

$$dls := x, x - \frac{1}{6}x^3, x - \frac{1}{6}x^3, x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5, x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5, x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7,$$

$$x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7, x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{362880}x^9,$$

$$x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{362880}x^9,$$

$$x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{362880}x^9 - \frac{1}{39916800}x^{11},$$

$$x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{362880}x^9 - \frac{1}{39916800}x^{11},$$

$$x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{362880}x^9 - \frac{1}{39916800}x^{11} + \frac{1}{6227020800}x^{13},$$

$$\begin{aligned}
& x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{362880}x^9 - \frac{1}{39916800}x^{11} + \frac{1}{6227020800}x^{13}, x - \frac{1}{6}x^3 \\
& + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{362880}x^9 - \frac{1}{39916800}x^{11} + \frac{1}{6227020800}x^{13} - \frac{1}{1307674368000}x^{15}, x \\
& - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{362880}x^9 - \frac{1}{39916800}x^{11} + \frac{1}{6227020800}x^{13} \\
& - \frac{1}{1307674368000}x^{15}, x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{362880}x^9 - \frac{1}{39916800}x^{11} \\
& + \frac{1}{6227020800}x^{13} - \frac{1}{1307674368000}x^{15} + \frac{1}{355687428096000}x^{17}, x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 \\
& - \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{362880}x^9 - \frac{1}{39916800}x^{11} + \frac{1}{6227020800}x^{13} - \frac{1}{1307674368000}x^{15} \\
& + \frac{1}{355687428096000}x^{17}, x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{362880}x^9 - \frac{1}{39916800}x^{11} \\
& + \frac{1}{6227020800}x^{13} - \frac{1}{1307674368000}x^{15} + \frac{1}{355687428096000}x^{17} \\
& - \frac{1}{121645100408832000}x^{19}
\end{aligned}$$

Pas mal ! Il aurait été difficile d'imaginer une telle commande sans les tests précédents.

Il subsiste cependant un défaut : cette commande bégaie. Les développements limités du sinus sont impairs, il ne faut donc en calculer qu'un sur deux :

```
> dls:=seq(convert(taylor(sin(x),x=0,2*i+1),polynom),i=1..10);
```

$$dls := x, x - \frac{1}{6}x^3, x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5, x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7,$$

$$x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{362880}x^9,$$

$$x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{362880}x^9 - \frac{1}{39916800}x^{11},$$

$$x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{362880}x^9 - \frac{1}{39916800}x^{11} + \frac{1}{6227020800}x^{13}, x - \frac{1}{6}x^3$$

$$+ \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{362880}x^9 - \frac{1}{39916800}x^{11} + \frac{1}{6227020800}x^{13} - \frac{1}{1307674368000}x^{15}, x$$

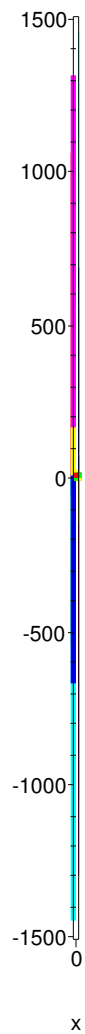
$$- \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{362880}x^9 - \frac{1}{39916800}x^{11} + \frac{1}{6227020800}x^{13}$$

$$- \frac{1}{1307674368000}x^{15} + \frac{1}{355687428096000}x^{17}, x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{362880}x^9$$

$$- \frac{1}{39916800}x^{11} + \frac{1}{6227020800}x^{13} - \frac{1}{1307674368000}x^{15} + \frac{1}{355687428096000}x^{17}$$

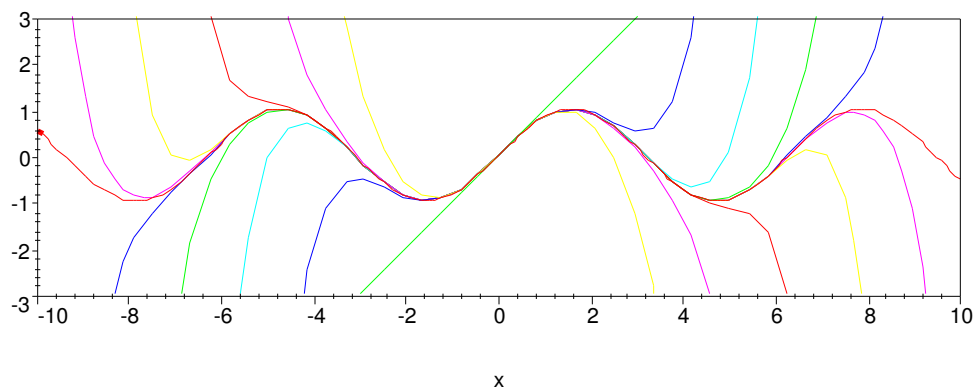
$$- \frac{1}{121645100408832000}x^{19}$$

```
> plot([sin(x),dls],x=-10..10);
```



On ne voit pas grand chose : la croissance de certains polynômes écrase le sinus. L'intervalle en y est [-1500,1500] ! On va le limiter quitte à laisser sortir certains graphes de la fenêtre de visualisation.

```
> plot([sin(x),dls],x=-10..10,-3..3);
```



C'est mieux.

[**Exercice 6** : Reprendre le même exercice avec $\ln(1+x)$.

— **Solution**

```
> dls:=seq(convert(taylor(ln(1+x),x=0,i),polynom),i=3..20);
```

$$dls := x - \frac{1}{2}x^2, x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3, x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4, x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5,$$

$$x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6, x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{7}x^7,$$

$$x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{7}x^7 - \frac{1}{8}x^8,$$

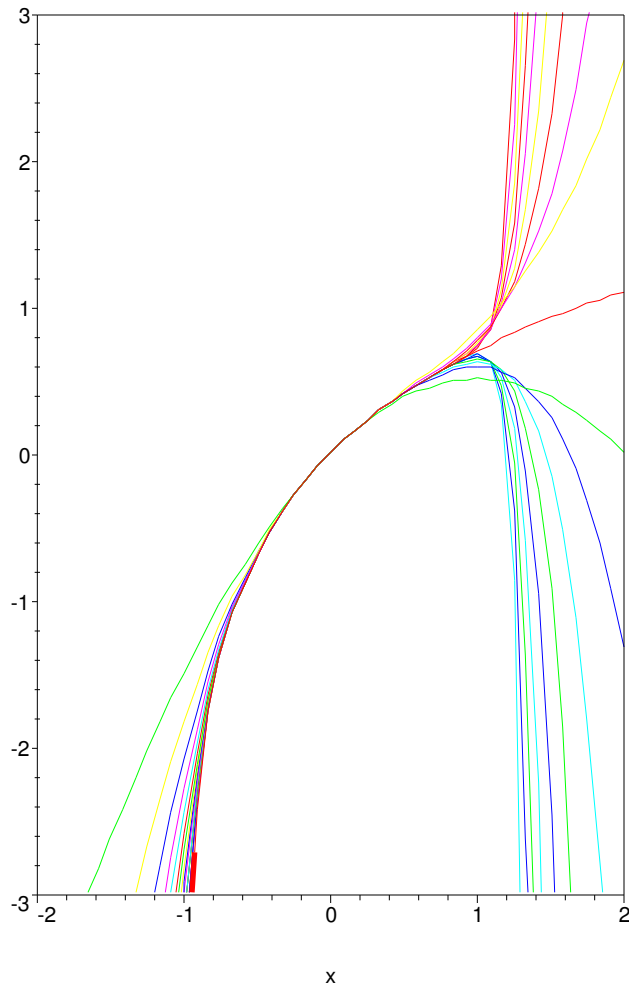
$$x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{7}x^7 - \frac{1}{8}x^8 + \frac{1}{9}x^9,$$

$$x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{7}x^7 - \frac{1}{8}x^8 + \frac{1}{9}x^9 - \frac{1}{10}x^{10},$$

$$\begin{aligned}
& x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{7}x^7 - \frac{1}{8}x^8 + \frac{1}{9}x^9 - \frac{1}{10}x^{10} + \frac{1}{11}x^{11}, \\
& x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{7}x^7 - \frac{1}{8}x^8 + \frac{1}{9}x^9 - \frac{1}{10}x^{10} + \frac{1}{11}x^{11} - \frac{1}{12}x^{12}, x \\
& -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{7}x^7 - \frac{1}{8}x^8 + \frac{1}{9}x^9 - \frac{1}{10}x^{10} + \frac{1}{11}x^{11} - \frac{1}{12}x^{12} + \frac{1}{13}x^{13}, \\
& x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{7}x^7 - \frac{1}{8}x^8 + \frac{1}{9}x^9 - \frac{1}{10}x^{10} + \frac{1}{11}x^{11} - \frac{1}{12}x^{12} \\
& + \frac{1}{13}x^{13} - \frac{1}{14}x^{14}, x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{7}x^7 - \frac{1}{8}x^8 + \frac{1}{9}x^9 - \frac{1}{10}x^{10} \\
& + \frac{1}{11}x^{11} - \frac{1}{12}x^{12} + \frac{1}{13}x^{13} - \frac{1}{14}x^{14} + \frac{1}{15}x^{15}, x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{7}x^7 \\
& - \frac{1}{8}x^8 + \frac{1}{9}x^9 - \frac{1}{10}x^{10} + \frac{1}{11}x^{11} - \frac{1}{12}x^{12} + \frac{1}{13}x^{13} - \frac{1}{14}x^{14} + \frac{1}{15}x^{15} - \frac{1}{16}x^{16}, x - \frac{1}{2}x^2 \\
& + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{7}x^7 - \frac{1}{8}x^8 + \frac{1}{9}x^9 - \frac{1}{10}x^{10} + \frac{1}{11}x^{11} - \frac{1}{12}x^{12} + \frac{1}{13}x^{13} \\
& - \frac{1}{14}x^{14} + \frac{1}{15}x^{15} - \frac{1}{16}x^{16} + \frac{1}{17}x^{17}, x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{7}x^7 - \frac{1}{8}x^8 \\
& + \frac{1}{9}x^9 - \frac{1}{10}x^{10} + \frac{1}{11}x^{11} - \frac{1}{12}x^{12} + \frac{1}{13}x^{13} - \frac{1}{14}x^{14} + \frac{1}{15}x^{15} - \frac{1}{16}x^{16} + \frac{1}{17}x^{17} - \frac{1}{18}x^{18}, x \\
& - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{7}x^7 - \frac{1}{8}x^8 + \frac{1}{9}x^9 - \frac{1}{10}x^{10} + \frac{1}{11}x^{11} - \frac{1}{12}x^{12} + \frac{1}{13}x^{13} \\
& - \frac{1}{14}x^{14} + \frac{1}{15}x^{15} - \frac{1}{16}x^{16} + \frac{1}{17}x^{17} - \frac{1}{18}x^{18} + \frac{1}{19}x^{19}
\end{aligned}$$

Il n'y a pas de parité : il faut tous les développements.

```
> plot([ln(1+x),dls],x=-2..2,-3..3);
```



Il faut un peu tâtonner pour trouver une bonne fenêtre de visualisation.

– Bibliothèques

Beaucoup de fonctions sont rangées dans des bibliothèques qu'il faut charger avant de les utiliser : un exemple avec la bibliothèque d'algèbre linéaire.

```
[ > ?linalg
```

Il y a beaucoup de fonctions.

```
> with(linalg);
```

```
Warning, new definition for norm
Warning, new definition for trace
```

```
[BlockDiagonal, GramSchmidt, JordanBlock, LUdecomp, QRdecomp, Wronskian, addcol,
```

```
addrow, adj, adjoint, angle, augment, backsub, band, basis, bezout, blockmatrix, charmat,
```

```
charpoly, cholesky, col, coldim, colspace, colspan, companion, concat, cond, copyinto,
```

```
crossprod, curl, definite, delcols, delrows, det, diag, diverge, dotprod, eigenvals,
```

```
eigenvalues, eigenvectors, eigenvects, entermatrix, equal, exponential, extend, ffgausselim,
```

```
fibonacci, forwardsub, frobenius, gausselim, gaussjord, geneqns, genmatrix, grad,
```

```
hadamard, hermite, hessian, hilbert, htranspose, ihermite, indexfunc, innerprod, intbasis,
```

inverse, ismith, issimilar, iszero, jacobian, jordan, kernel, laplacian, leastsqrs, linsolve, matadd, matrix, minor, minpoly, mulcol, mulrow, multiply, norm, normalize, nullspace, orthog, permanent, pivot, potential, randmatrix, randvector, rank, ratform, row, rowdim, rowspace, rowspan, rref, scalarmul, singularvals, smith, stack, submatrix, subvector, sumbasis, swapcol, swaprow, sylvester, toeplitz, trace, transpose, vandermonde, vecpotent, vectdim, vector, wronskian]

Chargement de la librairie.

```
> M:=randmatrix(5,6);
```

$$M := \begin{bmatrix} 77 & 66 & 54 & -5 & 99 & -61 \\ -50 & -12 & -18 & 31 & -26 & -62 \\ 1 & -47 & -91 & -47 & -61 & 41 \\ -58 & -90 & 53 & -1 & 94 & 83 \\ -86 & 23 & -84 & 19 & -50 & 88 \end{bmatrix}$$

Une matrice au hasard.

```
> gausselim(M);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & -47 & -91 & -47 & -61 & 41 \\ 0 & -2362 & -4568 & -2319 & -3076 & 1988 \\ 0 & 0 & \frac{-77499}{1181} & \frac{-9247}{2362} & \frac{-3454}{1181} & \frac{-137568}{1181} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3805117}{154998} & \frac{16537330}{77499} & \frac{-7787003}{25833} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2067997520}{3805117} & \frac{-1413533075}{3805117} \end{bmatrix}$$

La méthode de Gauss.

```
> linsolve(M,[0,0,0,0,0,0]);kernel(M);
```

$$\left[\frac{1493615715}{413599504} -t_1, -\frac{211707657}{103399876} -t_1, -\frac{112894049}{51699938} -t_1, \frac{655287229}{103399876} -t_1, \frac{282706615}{413599504} -t_1, -t_1 \right]$$

$$\left\{ \left[\frac{1493615715}{413599504}, \frac{-211707657}{103399876}, \frac{-112894049}{51699938}, \frac{655287229}{103399876}, \frac{282706615}{413599504}, 1 \right] \right\}$$

Le même résultat dit de deux manières.

Programmes

```
> restart; pour tout oublier
```

C'est souvent utile pour éviter des confusions avec des variables précédemment utilisées.

```
> pgcd1:=proc(a,b)
  if b=0 then a else pgcd1(b,irem(a,b)) fi end;
pgcd1 := proc(a, b) if b = 0 then a else pgcd1(b, irem(a, b)) end if end proc
```

Une programmation récurrente ou récursive utilisant un test.

```

[ > pgcd1(44865,4464);
                                     9
[ > trace(pgcd1);pgcd1(44865,4464);
                                     pgcd1
{--> enter pgcd1, args = 44865, 4464
{--> enter pgcd1, args = 4464, 225
{--> enter pgcd1, args = 225, 189
{--> enter pgcd1, args = 189, 36
{--> enter pgcd1, args = 36, 9
{--> enter pgcd1, args = 9, 0
                                     9
<-- exit pgcd1 (now in pgcd1) = 9}
                                     9
<-- exit pgcd1 (now in pgcd1) = 9}
                                     9
<-- exit pgcd1 (now in pgcd1) = 9}
                                     9
<-- exit pgcd1 (now in pgcd1) = 9}
                                     9
<-- exit pgcd1 (now in pgcd1) = 9}
                                     9
<-- exit pgcd1 (now at top level) = 9}
                                     9
]

```

trace permet de voir les appels successifs de pgcd1, c'est utile pour la recherche d'erreur.

```

[ > pgcd2:=proc(a,b)
  local r;
  while b<>0 do r:=irem(a,b);a:=b;b:=r od;
  a
end;
pgcd2 := proc(a, b) local r; while b ≠ 0 do r := irem(a, b); a := b; b := r end do; a end proc
]

```

Une programmation itérative avec une boucle.

```

[ > pgcd2(44865,4464);
Error, (in pgcd2) Illegal use of a formal parameter
]

```

On ne peut pas affecter les paramètres de la procédure, il faut faire des copies locales.

```

[ > pgcd2:=proc(a0,b0)
  local a,b,r;
  a:=a0;b:=b0;
  while b<>0 do r:=irem(a,b);a:=b;b:=r od;
  a
end;
pgcd2 := proc(a0, b0)
local a, b, r;
  a := a0; b := b0; while b ≠ 0 do r := irem(a, b); a := b; b := r end do; a
end proc
[ > pgcd2(44865,4464);
                                     9
[ > trace(pgcd2);pgcd2(44865,4464);
                                     pgcd2
{--> enter pgcd2, args = 44865, 4464
                                     a := 44865
                                     b := 4464
]
]

```

```

r := 225
a := 4464
b := 225
r := 189
a := 225
b := 189
r := 36
a := 189
b := 36
r := 9
a := 36
b := 9
r := 0
a := 9
b := 0
9
<-- exit pgcd2 (now at top level) = 9}
9

```

[**Exercice7** : De la même façon programmer de deux manières la factorielle.

– **Solution**

```

[ > fact1:=proc(n)
  if n=0 then 1 else n*fact1(n-1) fi end;
  fact1 := proc(n) if n = 0 then 1 else n*fact1(n - 1) end if end proc
[ > fact1(5);
  120
[ > fact2:=proc(n)
  local fac,i;
  fac:=1;
  for i from 2 to n do fac:=fac*i od;
  fac
  end;
  fact2 :=
  proc(n) local fac, i; fac := 1; for i from 2 to n do fac := fac*i end do; fac end proc
[ > fact2(5);
  120

```

– **Equations différentielles**

La fonction dsolve permet de calculer les solutions d'une équation différentielle ou d'un système.

La solution peut avoir différents formats : analytique, séries formelles, intégrales.

Les méthodes utilisées sont multiples, la fonction dsolve est en fait l'interface de toute une librairie.

[> ?dsolve

Un exemple : l'équation $x \left(\frac{d}{dx} y(x) \right) = y(x) \ln(x y(x)) - y(x)$

```
[ > EqDiff:=x*diff(y(x),x)=y(x)*ln(x*y(x))-y(x);  
      EqDiff:=x*(d/dx y(x))=y(x) ln(x y(x))-y(x)  
[ > dsolve(EqDiff,y(x));  
      x=_C1 ln(x)+_C1 ln(y(x))
```

Lorsqu'on ne sait pas résoudre ou que l'on veut voir on peut tracer des solutions.

Il faut charger des librairies.

```
[ > with(DEtools):with(plots):
```

Un système de Lotka-Volterra (dynamique des populations)

```
[ > f:=(x,y)->3*x*(1-0.02*y):g:=(x,y)->0.1*y*(x-50):  
[ > eqns:=diff(x(t),t)=f(x(t),y(t)),diff(y(t),t)=g(x(t),y(t))];  
      eqns:=d/dt x(t)=3 x(t)(1-0.02 y(t)), d/dt y(t)=0.1 y(t)(x(t)-50)
```

Le champ de vecteurs et deux trajectoires

```
[ > DEplot({eqns},[x(t),y(t)],0..10,[[x(0)=80,y(0)=10],[x(0)=80,y  
(0)=40]],x(t)=0..140,y(t)=0..160,linecolor=[black,blue],steps  
ize=0.01);
```

