Problème de Plateau à la Reifenberg

Vincent Feuvrier

Le 4 décembre

Un ensemble minimal au sens d'Almgren est tel que sa mesure ne peut être rendue plus petite en lui appliquant une déformation prise dans un classe adaptée. On imposera entre autres à nos déformations d'être à support compact relativement à un domaine U, ce qui interdit en particulier de modifier les points proches de la frontière. Dans ces conditions, le problème de trouver des ensembles minimaux peut se lire comme une réécriture du problème de Plateau. En terme de courants, on cherche à minimiser la taille (mesure du support) et non la masse (intégrale de la multiplicité sur le support). Les surfaces de masse minimale ont été abondamment étudiées en termes de géométrie différentielle ; en comparaison il existe relativement peu de résultats d'existence pour les minimiseurs de taille.

L'une des difficultés techniques provient de la non semi-continuité inférieure de la mesure par passage à la limite. On propose une méthode inspirée de Reifenberg basée sur la construction de complexes polyédriques adaptés à une suite minimisante donnée, sur lesquels on effectue une minimisation finie par déformation des compétiteurs initiaux sur les faces des polyèdres. On peut montrer qu'en imposant des conditions adéquates sur l'orientation et la forme des polyèdres utilisés, il est possible de construire une suite minimisante de structures polyédriques qui convergent en distance de Hausdorff vers un ensemble minimal. On notera que cette construction peut être effectuée en dimensions et codimensions finies quelconques. Dans certains cas pour des ensembles de dimension 2, il est alors possible de conclure en utilisant le théorème de régularité de Jean Taylor pour construire une rétraction depuis un voisinage sur la limite obtenue, et montrer ainsi qu'elle est toujours dans la classe topologique initiale.

Il est prévu de donner en début d'exposé les rappels nécessaires de théorie de la mesure géométrique.