

Partiel

17 décembre 2009

Exercice 1. On considère l'espace \mathbf{R}^4 muni du produit scalaire usuel et une application linéaire $f : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique \mathcal{B}_0 de \mathbf{R}^4 est la suivante :

$$M := \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1.1. Que peut-on dire a priori (à l'aide des théorèmes du cours) sur les valeurs propres et les vecteurs propres de M ?

La matrice M est symétrique et réelle. Il existe donc une base orthonormée de \mathbf{R}^4 composée de vecteurs propres de M . La matrice M a 4 valeurs propres réelles, comptées avec multiplicité.

1.2. Vérifier que 1 est valeur propre de M . On désigne par E_1 l'espace propre correspondant. Déterminer une base orthonormée de E_1 .

La matrice $M - I_4$ est égale à

$$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ses lignes sont toutes proportionnelles à la première, non nulle. Elle est donc de rang 1. L'espace propre E_1 est donc de dimension $4 - 1 = 3$. C'est l'ensemble des solutions de l'unique équation $-x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0$. Une base de l'espace des solutions est $((1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1))$. Pour obtenir une base orthogonale on utilise l'algorithme de Gram-Schmidt :

$$((1, 1, 0, 0), (-1/2, 1/2, 1, 0), (1/3, -1/3, 1/3, 1)).$$

En normant les vecteurs, on en déduit une base orthonormée de E_1 :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0, 0), \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 1, 2, 0), \frac{1}{2\sqrt{3}}(1, -1, 1, 3) \right).$$

1.3. Citer un résultat du cours qui donne une relation entre la multiplicité d'une valeur propre λ et la dimension de l'espace propre associé E_λ . À l'aide de ce résultat, déterminer une base orthonormée \mathcal{B} de \mathbf{R}^4 formée de vecteurs propres de M .

La multiplicité d'une valeur propre est au moins égale à la dimension de l'espace propre associé. La multiplicité de 1 comme valeur propre de M est au moins 3. La somme des multiplicités est égale à 4, degré du polynôme caractéristique. La trace est égale à la somme des valeurs propres, comptées avec multiplicité. On a $3 = \text{Tr}(M) = 3 \times 1 + \lambda$. La valeur propre λ vaut 0. Elle est de multiplicité 1. L'espace propre E_0 est donc de dimension 1. Comme M est symétrique, E_0 est l'orthogonal de E_1 . Une base orthonormée de E_0 est donc $(\frac{1}{2}(-1, 1, -1, 1))$. La base \mathcal{B} est donc

$$\mathcal{B} := \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0, 0), \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 1, 2, 0), \frac{1}{2\sqrt{3}}(1, -1, 1, 3), \frac{1}{2}(-1, 1, -1, 1) \right).$$

1.4. Quel est le rang de la matrice M ? Combien vaut son déterminant? son polynôme caractéristique? Justifier vos réponses.

L'espace propre E_0 est le noyau de M . Le théorème du rang indique que le rang de M est $4 - 1 = 3$. Le déterminant est donc nul. Le polynôme caractéristique est $T(T - 1)^3$. On connaît en effet ses racines avec leur multiplicité et le coefficient du terme de plus haut degré qui est 1.

1.5. Montrer que f est la projection orthogonale sur E_1 . Écrire la matrice M' de l'application f dans la base \mathcal{B} . Déterminer une matrice orthogonale P telle que $PM' = MP$. Calculer P^{-1} . Calculer la matrice S de la symétrie orthogonale par rapport à E_1 dans la base canonique \mathcal{B}_0 .

La question 1.4 montre que

$$(1) \text{ pour } \vec{u} \text{ dans } E_1 \text{ on a } f(\vec{u}) = \vec{u}.$$

$$(2) \text{ pour } \vec{u} \text{ dans } E_0 \text{ on a } f(\vec{u}) = 0.$$

Tout vecteur \vec{u} de \mathbf{R}^4 se décompose en une somme $\vec{v} + \vec{w}$ avec \vec{v} dans E_1 et \vec{w} dans E_0 . Le vecteur \vec{v} est la projection orthogonale de u sur E_1 . On conclut que

$$f(\vec{u}) = f(\vec{v} + \vec{w}) = f(\vec{v}) + f(\vec{w}) = \vec{v} = \text{pr}_{E_1}^\perp(\vec{u}).$$

La matrice M' de f dans la base de vecteurs propres \mathcal{B} est

$$M' := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice de passage P de \mathcal{B}_0 à \mathcal{B} est la matrice des coordonnées des vecteurs de \mathcal{B} dans \mathcal{B}_0 . Elle vaut

$$P := \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/2\sqrt{3} & -1/2 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/2\sqrt{3} & 1/2 \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/2\sqrt{3} & -1/2 \\ 0 & 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

C'est une matrice orthogonale. Son inverse est sa transposée tP . On a $MP = PM'$.

Si \vec{v} est un vecteur de \mathbf{R}^4 , son symétrique par rapport à E_1 est égal à $2\text{pr}_{E_1}^\perp(\vec{v}) - \vec{v} = 2f(\vec{v}) - \vec{v}$. On a donc $S = 2M - I_4$. On en déduit la matrice S :

$$S := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. On donne la matrice suivante dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 5/2 \end{pmatrix}.$$

2.1. Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de la matrice A . Calculer une base \mathcal{B} de \mathbf{R}^2 formée de vecteurs propres de A .

Le polynôme caractéristique de A est $T^2 - (5/2)T + 1$ qui a pour racines $1/2$ et 2 . Les vecteurs $(2, 1)$ et $(1, 2)$ sont des vecteurs propres associés respectivement à $1/2$ et 2 . La famille $\mathcal{B} := (V, W) = ((2, 1), (1, 2))$ est une base de \mathbf{R}^2 formée de vecteurs propres de A .

On choisit un vecteur U_0 dans \mathbf{R}^2 et on étudie la suite de vecteurs de \mathbf{R}^2 de premier terme U_0 et définie, pour $n \geq 0$, par $U_{n+1} = AU_n$.

2.2. On considère ici le vecteur $U_0 := (1, 3)$. Exprimer U_0 dans la base \mathcal{B} . Calculer U_n en fonction de n . Pour $n \geq 0$, on note u_n la première coordonnée de U_n dans la base canonique de \mathbf{R}^2 . Étudier, quand n tend vers l'infini, le comportement de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ (limite éventuelle, équivalent simple).

On décompose U_0 dans la base \mathcal{B} :

$$U_0 = -(1/3)V + (5/3)W.$$

Comme V et W sont des vecteurs propres de A , on a

$$U_n = A^n U_0 = -(1/3)A^n V + (5/3)A^n W = -(1/3)(1/2)^n V + (5/3)2^n W.$$

On en déduit, en prenant la première coordonnée

$$u_n = -(2/3)(1/2)^n + (5/3)2^n.$$

Quand $n \mapsto \infty$, la suite u_n est équivalente à la suite géométrique $(5/3)2^n$ et tend vers $+\infty$.

2.3. On considère maintenant un vecteur U_0 quelconque. Est-ce que la réponse à la question précédente dépend du premier terme U_0 ? Si oui, comment?

Si $U_0 = \alpha V + \beta W$ on obtient cette fois

$$u_n = 2\alpha(1/2)^n + \beta 2^n.$$

Si $\beta \neq 0$ et $n \mapsto \infty$, la suite u_n est équivalente à la suite géométrique $\beta 2^n$ et tend vers $+\infty$.

Si $\beta = 0, \alpha \neq 0$ et $n \mapsto \infty$, la suite u_n est équivalente à la suite géométrique $2\alpha(1/2)^n$ et tend vers 0.

Si $\alpha = \beta = 0$ on a $u_n = 0$ pour tout n .

2.4. En déduire, suivant les valeurs de u_0, u_1 , le comportement de la suite de réels de premiers termes u_0, u_1 et définie, pour $n \geq 0$, par

$$u_{n+2} = \frac{5}{2}u_{n+1} - u_n.$$

On pose, pour $n \geq 0$, $U_n = (u_n, u_{n+1})$. On obtient $U_{n+1} = AU_n$. Quand $n \mapsto \infty$, la suite u_n tend vers $+\infty$ si $u_0 - 2u_1 \neq 0$ et tend vers 0 sinon.

Exercice 3.

3.1. Donner un exemple de matrice 2×2 à coefficients réels non diagonalisable. Justifier votre choix.

La matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est triangulaire, elle a une unique valeur propre de multiplicité 2 qui est 0. L'espace propre est le noyau de M . Comme M est de rang 1, son noyau est de dimension $2 - 1 = 1$. Il n'existe pas de base de vecteurs propres.

3.2. Une matrice diagonalisable est-elle inversible? Justifier votre réponse.

La matrice nulle est diagonale et n'est pas inversible.

3.3. Démontrer l'assertion suivante : *On considère une matrice carrée M . Deux espaces propres de M associés à des valeurs propres différentes n'ont en commun que le vecteur nul.*

On considère un vecteur V qui est commun à deux espaces propres E et E' associés respectivement à des valeurs propres λ et λ' avec $\lambda \neq \lambda'$. On a $\lambda V = MV = \lambda'V$. On en déduit $(\lambda - \lambda')V = 0$ puis $V = 0$ puisque $\lambda \neq \lambda'$.