

Interrogation 4

On considère les matrices suivantes

$$A := \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } B := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

QUESTION 1. Est-ce que le vecteur $(1, 0, -1)$ est un vecteur propre de A ? Justifier votre réponse.

On calcule le produit

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le vecteur $(-1, -4, 1)$ n'est pas proportionnel à $(1, 0, -1)$ qui n'est donc pas un vecteur propre de A .

QUESTION 2. Est-ce que 3 est une valeur propre de B ? Justifier votre réponse.

3 est une valeur propre de B si et seulement si la matrice $B - 3I_3$ n'est pas de rang maximum. On calcule

$$B - 3I_3 := \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

dont toutes les lignes sont proportionnelles. La matrice $B - 3I_3$ est donc de rang 1 et 3 est une valeur propre de B .

QUESTION 3. (*pour un bonus*). Déterminer tous les espaces propres de la matrice B .

L'espace propre E_3 associé à la valeur propre 3 est le noyau de la matrice $B - 3I$, autrement dit l'espace des solutions du système homogène de matrice $B - 3I$. Ce système se réduit à la seule équation

$$-x_1 + x_2 - 2x_3 = 0.$$

Une base de l'espace E_3 est par exemple $((1, 1, 0), (-2, 0, 1))$.

Comme la matrice B est symétrique, il existe une base orthogonale de \mathbf{R}^3 formée de vecteurs propres de B . L'orthogonal E_3^\perp est une droite. C'est donc un espace propre. Une base de E_3^\perp est $((-1, 1, -2))$. En calculant le produit

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix},$$

on constate que E_3^\perp est l'espace propre associé à la valeur propre -3 .
Vérification : $3 + 3 - 3 = 3$ qui est bien la valeur de la trace de B .