UNIVERSITÉ DE NICE — SL2M

2009-10 — ALGÈBRE 2

Partiel

Cours. On considère un espace vectoriel euclidien E, un sous-espace de dimension finie F et deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de E. Donner plusieurs énoncés équivalents au suivant :

$\vec{u}$ est la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur F.

Voir Interrogation 3.

Exercice 1. On considère dans $\mathbf{R}^4$ le sous espace vectoriel F engendré par les deux vecteurs $\vec{v} := (1,1,1,1)$ et $\vec{u} := (2,5,7,8)$.

1.1. Calculer la projection orthogonale du vecteur $\vec{w} := (1,2,3,3)$ sur F.

On calcule une base orthogonale de F (algorithme de Gram-Schmidt). Elle est composée de $\vec{v}$ et du vecteur

$$\vec{s} = \vec{u} - \frac{\langle \vec{v} \mid \vec{u} \rangle}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v} = \vec{u} - \frac{11}{2}\vec{v} = \frac{1}{2}(-7,-1,3,5).$$

On calcule ensuite la projection de $\vec{w}$ sur F

$$\mathrm{pr}_F^{\perp}(\vec{w}) = \frac{\langle \vec{v} \mid \vec{w} \rangle}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v} + \frac{\langle \vec{s} \mid \vec{w} \rangle}{\|\vec{s}\|^2}\vec{s} = \frac{9}{4}\vec{v} + \frac{5}{14}\vec{s} = (1, \frac{29}{14}, \frac{39}{14}, \frac{22}{7}).$$

On note que

$$\mathrm{pr}_F^{\perp}(\vec{w}) = \frac{9}{4}\vec{v} + \frac{5}{14}\vec{s} = \frac{5}{14}\vec{u} + \frac{2}{7}\vec{v}.$$

1.2. En déduire la valeur du couple (a,b) pour laquelle la fonction suivante

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (a,b) & \longmapsto & \|\vec{w} - a\vec{u} - b\vec{v}\|^2 \end{array}$$

atteint son minimum.

La fonction est minimum lorsque $a\vec{u} + b\vec{v}$ est la projection orthogonale de $\vec{w}$ sur F. C'est le cas lorsque $a = \frac{5}{14}$ et $b = \frac{2}{7}$.

***Commentaire** : Si on considère dans $\mathbf{R}^2$ les 4 points (M_1, M_2, M_3, M_4) de coordonnées respectives $((2,1),(5,2),(7,3),(8,3))$ et la droite d'équation $y = ax + b$ la quantité*

$$\sum_{i=1}^{4} (y_i - ax_i - b)^2$$

est donc minimale lorsque $a = \frac{5}{14}$ et $b = \frac{2}{7}$. La droite $y = \frac{5}{14}x + \frac{2}{7}$ est celle qui est la plus proche des 4 points au sens où elle minimise la somme des carrés des "distances" des points à la droite (distance mesurée sur la verticale).

Exercice 2. On travaille dans $\mathbf{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel. On considère l'application linéaire f

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (x_1,x_2,x_3) & \longmapsto & (3x_1 - 2x_2 + 4x_3, -2x_1 + 6x_2 + 2x_3, 4x_1 + 2x_2 + 3x_3) \end{array}$$

et on désigne par A la matrice de f dans la base canonique

$$A := \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

2.1. Est-ce que le vecteur $(1,0,1)$ est un vecteur propre de A ?
Si oui, pour quelle valeur propre ? Déterminer une base orthonormée de l'espace propre E associé à cette valeur propre.

On calcule l'image du vecteur par f : c'est $(7,0,7)$. Le vecteur proposé est un vecteur propre pour la valeur propre 7. L'espace propre associé à la valeur propre 7 est l'ensemble des solutions du système de matrice $A-7I$. Ce système est de rang 1 et se ramène à la seule équation $-2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$. On a déjà une solution $(1,0,1)$. Pour avoir une base de E, il suffit de trouver une autre solution qui ne soit pas proportionnelle à la première, par exemple $(1,-2,0)$.
Pour trouver une base orthonormée de E, on utilise l'algorithme de Gram-Schmidt. Le vecteur

$$(1,-2,0) - \frac{1}{2}(1,0,1) = \frac{1}{2}(1,-4,-1)$$

est un vecteur de E orthogonal à $(1,0,1)$ et le couple

$$(\vec{u},\vec{v}) := (\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1), \frac{1}{3\sqrt{2}}(1,-4,-1))$$

une base orthonormée de E.

2.2. Déterminer une base orthonormée de l'orthogonal $E^\perp$. Montrer que $E^\perp$ est un espace propre de A et déterminer la valeur propre correspondante.

E est un plan d'équation $-2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$. On en déduit que le vecteur $(-2,-1,2)$ est un vecteur directeur de la droite $E^\perp$. Une base orthonormée de $E^\perp$ est donc

$$(\vec{w}) := (\frac{1}{3}(-2,-1,2)).$$

On calcule l'image du vecteur $(-2,-1,2)$ par f. C'est le vecteur $(4,2,-4)$. Le vecteur $(-2,-1,2)$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre -2. La matrice A est symétrique : l'espace propre associé à la valeur propre -2 est donc orthogonal à E. C'est donc $E^\perp$.

2.3. Trouver une base orthonormée $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ de $\mathbf{R}^3$ formée de vecteurs propres de la matrice A. Écrire la matrice P des coordonnées des vecteurs $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ dans la base canonique.

La matrice

$$P := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{4}{3\sqrt{2}} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

est la matrice des coordonnées des vecteurs $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ dans la base canonique et la famille $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est orthonormée.

2.4. Calculer ${}^tPP$, AP. Conclure.

Comme la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base orthonormée, la matrice P est orthogonale. On a donc ${}^tPP = I_3$. La famille des vecteurs colonnes de la matrice produit AP est $(7\vec{u}, 7\vec{v}, -2\vec{w})$. On a donc $AP = PD$ avec $D = \mathrm{Diag}(7, 7, -2)$.

2.5. On considère trois réels a, b et c et la combinaison linéaire

$$a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}.$$

Calculer $f(a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w})$ et $\|a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}\|$ en fonction de a, b et c. Montrer que

$$\forall \vec{y} \in \mathbf{R}^3 \quad \|f(\vec{y})\| \leq 7\|\vec{y}\|$$

puis que

$$\max_{\|\vec{y}\|=1} \|f(\vec{y})\| = 7.$$

La propriété essentielle pour cette question est que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont des vecteurs propres de f associés respectivement aux valeurs propres 7, 7 et -2. On a donc $f(a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}) = 7a\vec{u} + 7b\vec{v} - 2c\vec{w}$. Comme la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est orthonormée on a

$$\|a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}\|^2 = a^2 + b^2 + c^2 \text{ et } \|f(a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w})\|^2 = (7a)^2 + (7b)^2 + (-2c)^2.$$

On en déduit que

$$\|f(a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w})\|^2 \leq 7^2\|a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}\|^2.$$

Tout vecteur y de $\mathbf{R}^3$ se décompose dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$. On a donc :

$$\forall \vec{y} \in \mathbf{R}^3 \quad \|f(\vec{y})\| \leq 7\|\vec{y}\|$$

Cette borne est atteinte par exemple pour $\vec{y} = \vec{u}$. On a donc

$$\max_{\|\vec{y}\|=1} \|f(\vec{y})\| = 7.$$

2.6. Montrer que

$$\forall \vec{y} \in \mathbf{R}^3 \quad -2\|\vec{y}\|^2 \leq \langle f(\vec{y}) \mid \vec{y}\rangle \leq 7\|\vec{y}\|^2$$

puis que

$$\max_{\|\vec{y}\|=1} \langle f(\vec{y}) \mid \vec{y}\rangle = 7 \text{ et } \min_{\|\vec{y}\|=1} \langle f(\vec{y}) \mid \vec{y}\rangle = -2.$$

Comme la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est orthonormée on a :

$$\langle f(a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}) \mid a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}\rangle = \langle 7a\vec{u} + 7b\vec{v} - 2c\vec{w} \mid a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}\rangle = 7a^2 + 7b^2 - 2c^2.$$

On en déduit l'encadrement suivant

$$-2(a^2 + b^2 + c^2) \leq \langle f(a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}) \mid a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}\rangle \leq 7(a^2 + b^2 + c^2)$$

Tout vecteur y de $\mathbf{R}^3$ se décompose dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$. On a donc :

$$\forall \vec{y} \in \mathbf{R}^3 \quad -2\|\vec{y}\|^2 \leq \langle f(\vec{y}) \mid \vec{y}\rangle \leq 7\|\vec{y}\|^2$$

La borne supérieure est atteinte par exemple pour $\vec{y} = \vec{u}$ et la borne inférieure atteinte pour $\vec{y} = \vec{w}$. On a donc

$$\max_{\|\vec{y}\|=1} \langle f(\vec{y}) \mid \vec{y}\rangle = 7 \text{ et } \min_{\|\vec{y}\|=1} \langle f(\vec{y}) \mid \vec{y}\rangle = -2.$$