

Contrôle terminal

Éléments de correction

Exercice 1. VRAI ou FAUX (justifier vos réponses).

1.1. La matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable.

FAUX. La matrice A est triangulaire. Elle a 1 comme unique valeur propre. La matrice $A - I_3$ est de rang 2, ce qui signifie que l'espace propre associé à la valeur propre 1 est de dimension $3 - 2 = 1$. Il ne peut donc pas exister de base de vecteurs propres. La matrice A n'est pas diagonalisable.

1.2. La matrice

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable.

VRAI. La matrice B est triangulaire également. Elle a trois valeurs propres distinctes qui sont 1, 2 et 3 et sont donc simples. La matrice B est donc diagonalisable.

Exercice 2. On travaille dans \mathbf{R}^4 , muni du produit scalaire usuel. On désigne par \mathcal{B} la base canonique. On considère une application linéaire $f : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^4$ dont la matrice dans la base \mathcal{B} est la suivante

$$M := \begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & -4 & 8 \\ -2 & -4 & 0 & -8 \\ 4 & 8 & -8 & 12 \end{pmatrix}$$

2.1. Que peut-on dire *a priori* (sans calcul) des valeurs propres et des vecteurs propres de M ?

La matrice M est symétrique à coefficients réels. Elle est donc diagonalisable. Ses valeurs propres sont réelles. Il existe une base orthonormée de \mathbf{R}^4 formée de vecteurs propres.

2.2. Montrer que -4 est une valeur propre de M . On désigne par E le sous-espace propre associé à la valeur propre -4 . Calculer une base orthonormée de E .

On étudie la matrice $M + 4I_4$.

$$M + 4I_4 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -4 & 8 \\ -2 & -4 & 4 & -8 \\ 4 & 8 & -8 & 16 \end{pmatrix}$$

est de rang 1 car toutes ses lignes sont proportionnelles à la première qui n'est pas nulle. On en déduit que -4 est valeur propre et que l'espace propre associé E est de dimension 3.

E est l'espace des solutions de l'équation $x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0$.

Une base de E est donc $((0, 1, 1, 0), (4, 0, 0, -1), (2, -1, 0, 0))$. On utilise l'algorithme de Gram-Schmidt pour construire une base orthogonale $((0, 1, 1, 0), (4, 0, 0, -1), (4, -17, 17, 16))$ et une base orthonormée $(\frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{17}}(4, 0, 0, -1), \frac{1}{\sqrt{850}}(4, -17, 17, 16))$.

2.3. On désigne par E^\perp le sous-espace de \mathbf{R}^4 orthogonal à E . Donner la dimension de E^\perp . Donner une base orthonormée du sous-espace E^\perp .

L'espace orthogonal E^\perp est de dimension $4 - 3 = 1$. Il est engendré par le vecteur $\vec{n} := (1, 2, -2, 4)$ de norme 5. Une base orthonormée de E^\perp est donc $(\frac{1}{5}(1, 2, -2, 4))$.

2.4. Est-ce que E^\perp est un sous-espace propre de M ? Pour quelle valeur propre?

On calcule la valeur de $f(\vec{n})$, qui vaut $21\vec{n}$. L'espace E^\perp est donc un espace propre de M pour la valeur propre 21.

2.5. Donner une base orthonormée de \mathbf{R}^4 composée de vecteurs propres de M . On la désigne par \mathcal{B}' . Écrire la matrice de f dans la base \mathcal{B}' .

Compte tenu des questions précédentes, on a $\mathcal{B}' = (\frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{17}}(4, 0, 0, -1), \frac{1}{\sqrt{850}}(4, -17, 17, 16), \frac{1}{5}(1, 2, -2, 4))$. Comme \mathcal{B}' est formée de vecteurs propres pour les valeurs propres $(-4, -4, -4, 21)$ la matrice de f dans \mathcal{B}' est la matrice diagonale $\text{Diag}(-4, -4, -4, 21)$.

2.6. Écrire la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' . Combien vaut son inverse?

La matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' est la matrice des coordonnées des vecteurs de \mathcal{B}' dans \mathcal{B} soit

$$P := \begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{\sqrt{17}} & \frac{4}{\sqrt{850}} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-17}{\sqrt{850}} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{17}{\sqrt{850}} & \frac{-2}{5} \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{17}} & \frac{16}{\sqrt{850}} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}.$$

Comme cette matrice est orthogonale, son inverse est sa transposée.

2.7. Combien vaut le déterminant de M ? son polynôme caractéristique?

On connaît les valeurs propres de M avec leur multiplicité. On en déduit le polynôme caractéristique de M qui vaut $(T + 4)^3(T - 21)$ et le déterminant $21 \times (-4)^3$.

2.8. On considère le vecteur $\vec{u} := (1, 0, 1, 0)$. Calculer ses coordonnées dans la base \mathcal{B}' . En déduire la valeur de $f^n(\vec{u})$ pour n entier naturel.

Le vecteur \vec{u} est la somme des deux vecteurs e_1 et e_3 de la base \mathcal{B} . La matrice tP donne les coordonnées des vecteurs de \mathcal{B} dans \mathcal{B}' . Si on désigne par $\vec{e}_i, 1 \leq i \leq 4$ les vecteurs de la base \mathcal{B}' , on a

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_1 + \frac{4}{\sqrt{17}}\vec{e}_2 + \frac{21}{\sqrt{850}}\vec{e}_3 - \frac{1}{5}\vec{e}_4.$$

Comme les $\vec{e}_i, 1 \leq i \leq 4$ sont des vecteurs propres de M respectivement associés aux valeurs propres $-4, -4, -4, 21$ on en déduit que

$$f^n(\vec{e}_i) = (-4)^n \vec{e}_i \text{ pour } i \text{ de } 1 \text{ à } 3 \text{ et } f^n(\vec{e}_4) = (21)^n \vec{e}_4.$$

Finalement, par linéarité de f

$$f^n(\vec{u}) = (-4)^n \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_1 + \frac{4}{\sqrt{17}}\vec{e}_2 + \frac{21}{\sqrt{850}}\vec{e}_3 \right) - (21)^n \frac{1}{5}\vec{e}_4 = \frac{(-4)^n}{25}(26, 2, 23, 4) + \frac{(21)^n}{25}(-1, -2, 2, -4).$$