Partiel : éléments de correction.

Exercice 1. Énoncer le *théorème du rang*.

Exercice 2. Dans $\mathbf{R}^4$, muni du produit scalaire usuel, on considère les trois vecteurs $\vec{u} = (1, -2, -1, 2)$, $\vec{v} = (3, -1, 1, 13)$ et $\vec{x} = (-4, 1, 0, 3)$.
On désigne par E le sous-espace vectoriel engendré par la famille $(\vec{u}, \vec{v})$.

Parmi les assertions ci-dessous (questions 2.1 à 2.6) indiquer celles qui sont vraies ou fausses. Justifier toutes vos réponses.

2.1. Le vecteur $\dfrac{\langle \vec{x} \mid \vec{u} \rangle}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{u}$.

VRAI. Le vecteur proposé est nul.

2.2. La famille $(\vec{u}, \vec{v})$ est une famille orthogonale.

FAUX. Le produit scalaire $\langle \vec{u} \mid \vec{v} \rangle$ n'est pas nul. Il est égal à 30.

2.3. La projection orthogonale de $\vec{x}$ sur E est donnée par la formule suivante

$$\vec{w} := \frac{\langle \vec{x} \mid \vec{u} \rangle}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u} + \frac{\langle \vec{x} \mid \vec{v} \rangle}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v}.$$

FAUX. Le vecteur proposé $\vec{w}$ est bien une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, mais la différence $\vec{x} - \vec{w}$ n'est pas orthogonale à E : le produit scalaire $\langle \vec{x} - \vec{w} \mid \vec{u} \rangle$ vaut

$$\langle \vec{x} - \vec{w} \mid \vec{u} \rangle = -\frac{\langle \vec{x} \mid \vec{v} \rangle}{\|\vec{v}\|^2}\langle \vec{v} \mid \vec{u} \rangle$$

qui n'est pas nul. On en déduit que $\vec{x} - \vec{w}$ n'est pas orthogonal à $\vec{u}$ donc pas orthogonal à E.

2.4. On désigne par $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$ la *base canonique* de $\mathbf{R}^4$ (par exemple, $\vec{e}_3$ est le vecteur $(0, 0, 1, 0)$) : la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$ est une famille libre.

VRAI. On échelonne les colonnes de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 13 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En faisant $C_2 - 3C_1 \mapsto C_2$, on obtient

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

qui est échelonnée de rang 4.

2.5. On applique l'algorithme de Gram-Schmidt à la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$: la sortie est une famille $(\vec{u}, \vec{r}, \vec{s}, \vec{t})$ qui est une base orthogonale de $\mathbf{R}^4$.

VRAI. Le théorème de Gram-Schmidt assure qu'à partir d'une base de $\mathbf{R}^4$ on trouve une base orthogonale de $\mathbf{R}^4$.

2.6. La famille $(\vec{s}, \vec{t})$ est une base orthogonale du sous-espace vectoriel orthogonal à E, noté $E^\perp$.

VRAI.

(1) Puisque la famille $(\vec{u}, \vec{r}, \vec{s}, \vec{t})$ est obtenue par l'algorithme de Gram-Schmidt à partir de $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$, le sous-espace engendré par $(\vec{u}, \vec{r})$ est le sous-espace engendré par $(\vec{u}, \vec{v})$, c'est-à-dire E.

(2) Puisque $(\vec{u}, \vec{r}, \vec{s}, \vec{t})$ est une base orthogonale de $\mathbf{R}^4$, les vecteurs $\vec{s}$ et $\vec{t}$ sont tous deux orthogonaux à $\vec{u}$ et $\vec{r}$, donc orthogonaux à E. Réciproquement, un vecteur $\vec{y}$ de $\mathbf{R}^4$ se décompose de manière unique dans la base $(\vec{u}, \vec{r}, \vec{s}, \vec{t})$ de la façon suivante :

$$\vec{y} := \frac{\langle \vec{y} \mid \vec{u} \rangle}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u} + \frac{\langle \vec{y} \mid \vec{r} \rangle}{\|\vec{r}\|^2}\vec{r} + \frac{\langle \vec{y} \mid \vec{s} \rangle}{\|\vec{s}\|^2}\vec{s} + \frac{\langle \vec{y} \mid \vec{t} \rangle}{\|\vec{t}\|^2}\vec{t}.$$

Il est orthogonal à E, c'est-à-dire à $\vec{u}$ et $\vec{r}$, si et seulement s'il est combinaison de $\vec{s}$ et $\vec{t}$.

2.7. Calculer la matrice de la projection orthogonale $\mathrm{pr}_E^\perp$ dans la base $(\vec{u}, \vec{r}, \vec{s}, \vec{t})$.

On a $\mathrm{pr}_E^\perp(\vec{u}) = \vec{u}$, $\mathrm{pr}_E^\perp(\vec{r}) = \vec{r}$ puisque $\vec{u}$ et $\vec{r}$ sont dans E et $\mathrm{pr}_E^\perp(\vec{s}) = \vec{0}$, $\mathrm{pr}_E^\perp(\vec{t}) = \vec{0}$ puisque $\vec{s}$ et $\vec{t}$ sont orthogonaux à E. La matrice demandée est donc :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.8. Calculer la projection orthogonale de $\vec{x}$ sur E.

Calculons d'abord une base orthogonale de E par l'algorithme de Gram-Schmidt.

$$\vec{r} := \vec{v} - \frac{\langle \vec{v} \mid \vec{u} \rangle}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u} = \vec{v} - \frac{30}{10}\vec{u} = (0, 5, 4, 7).$$

La famille $(\vec{u}, \vec{r})$ est une base orthogonale de E et la projection de $\vec{x}$ est donnée par

$$\mathrm{pr}_E^\perp(\vec{x}) = \frac{\langle \vec{x} \mid \vec{u} \rangle}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u} + \frac{\langle \vec{x} \mid \vec{r} \rangle}{\|\vec{r}\|^2}\vec{r} = \frac{13}{45}(0, 5, 4, 7).$$

2.9. Calculer la matrice de la projection orthogonale $\mathrm{pr}_E^\perp$ dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$.

De manière analogue à la question précédente on calcule les projections orthogonales sur E des vecteurs $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$.

$$\mathrm{pr}_E^\perp(\vec{e_1}) = \frac{\langle \vec{e_1} \mid \vec{u} \rangle}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u} + \frac{\langle \vec{e_1} \mid \vec{r} \rangle}{\|\vec{r}\|^2}\vec{r} = \frac{1}{10}(1, -2, -1, 2).$$

$$\mathrm{pr}_E^\perp(\vec{e_2}) = \frac{\langle \vec{e_2} \mid \vec{u} \rangle}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u} + \frac{\langle \vec{e_2} \mid \vec{r} \rangle}{\|\vec{r}\|^2}\vec{r} = \frac{-2}{10}(1, -2, -1, 2) + \frac{5}{90}(0, 5, 4, 7) = \frac{1}{90}(-18, 61, 38, -1).$$

$$\mathrm{pr}_E^\perp(\vec{e_3}) = \frac{\langle \vec{e_3} \mid \vec{u} \rangle}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u} + \frac{\langle \vec{e_3} \mid \vec{r} \rangle}{\|\vec{r}\|^2}\vec{r} = \frac{-1}{10}(1, -2, -1, 2) + \frac{4}{90}(0, 5, 4, 7) = \frac{1}{90}(-9, 38, 25, 10).$$

$$\mathrm{pr}_E^\perp(\vec{e_4}) = \frac{\langle \vec{e_4} \mid \vec{u} \rangle}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u} + \frac{\langle \vec{e_4} \mid \vec{r} \rangle}{\|\vec{r}\|^2}\vec{r} = \frac{2}{10}(1, -2, -1, 2) + \frac{7}{90}(0, 5, 4, 7) = \frac{1}{90}(18, -1, 10, 85).$$

On en déduit la matrice de la projection $\mathrm{pr}_E^\perp$ dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$:

$$\frac{1}{90}\begin{pmatrix} 9 & -18 & -9 & 18 \\ -18 & 61 & 38 & -1 \\ -9 & 38 & 25 & 10 \\ 18 & -1 & 10 & 85 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. On considère le système suivant (4 équations à 2 inconnues (a, b)) :

$$(S)\left\{\begin{array}{rcrcr} a & + & 3b & = & -4 \\ -2a & - & b & = & 1 \\ -a & + & b & = & 0 \\ 2a & + & 13b & = & 3 \end{array}\right.$$

3.1. Le système S a-t-il des solutions dans $\mathbf{R}^2$?

On a vu dans l'exercice 2 que le vecteur x n'est pas combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$: il ne coïncide pas avec sa projection dans E. Le système S n'a donc pas de solution dans $\mathbf{R}^2$.

3.2. Quelle est la propriété essentielle d'une solution en moindres carrés (a, b) du système S ?

Une telle solution rend minimale la fonction suivante $(a, b) \longmapsto \|a\vec{u} + b\vec{v} - \vec{x}\|$, définie dans $\mathbf{R}^2$.

3.3. En utilisant les résultats de l'exercice 2, déterminer une telle solution en moindres carrés.

Le minimum est atteint lorsque $a\vec{u} + b\vec{v}$ est la projection orthogonale de $\vec{x}$ sur E. Reste donc à résoudre le système $a\vec{u} + b\vec{v} = \mathrm{pr}_E^\perp(\vec{x})$ qui aura une solution unique puisque $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de E. Il s'écrit :

$$(S')\left\{\begin{array}{rcrcr} a & + & 3b & = & 0 \\ -2a & - & b & = & 13/9 \\ -a & + & b & = & 52/45 \\ 2a & + & 13b & = & 91/45 \end{array}\right.$$

Comme **on sait que la solution existe et est unique**, il suffit de considérer les 2 premières équations (qui sont indépendantes !) pour trouver $a = -13/15$, $b = 13/45$.