

## Interrogation 2

Éléments de correction.

**Exercice 1.** On travaille dans  $\mathbf{R}^4$ , muni du produit scalaire usuel. On désigne par  $\mathcal{B}$  la base canonique. On considère une application linéaire  $f : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^4$  dont la matrice dans la base  $\mathcal{B}$  est la suivante

$$M := \begin{pmatrix} 15 & 5 & -5 & -15 \\ 5 & -9 & -1 & -3 \\ -5 & -1 & -9 & 3 \\ -15 & -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

1.1. Le vecteur  $\vec{v} := (0, 1, 1, 0)$  est-il un vecteur propre de la matrice  $M$  ? Si oui, pour quelle valeur propre ?

On calcule :  $f(\vec{v}) = (0, -10, -10, 0) = -10\vec{v}$ . Le vecteur  $\vec{v}$  est un vecteur propre de  $M$  (ou de  $f$ ) pour la valeur propre  $-10$ .

1.2. On désigne par  $E$  le sous-espace propre associé à cette valeur propre. Calculer une base orthonormée de  $E$ .

L'espace propre de  $M$  associé à la valeur propre  $-10$  est l'ensemble des solutions du système

$$\begin{aligned} 25x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 15x_4 &= 0 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 &= 0 \\ -5x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 &= 0 \\ -15x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 9x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Les équations sont toutes proportionnelles à la deuxième. L'ensemble des solutions est donc de dimension  $4-1=3$  (théorème du rang). Une base de cet espace est  $((0, 1, 1, 0), (3, 0, 0, 5), (0, 0, -3, 1))$ . L'algorithme de Gram-Schmidt permet d'en déduire une base orthogonale  $((0, 1, 1, 0), (3, 0, 0, 5), (-5, 17, -17, 3))$  puis une base orthonormée  $(\frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{17}}}(3, 0, 0, 5), \frac{1}{6\sqrt{17}}(-5, 17, -17, 3))$ .

1.3. On désigne par  $E^\perp$  le sous-espace de  $\mathbf{R}^4$  orthogonal à  $E$ . Donner la dimension de  $E^\perp$ . Donner une base orthonormée du sous-espace  $E^\perp$ .

On a vu à la question précédente que  $E$  est l'hyperplan d'équation  $5x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 0$ . Autrement dit un vecteur  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  appartient à  $E$  si et seulement si il est orthogonal au vecteur  $\vec{n} := (5, 1, -1, 3)$ . L'espace  $E^\perp$  est donc la droite engendrée par  $(5, 1, -1, 3)$ . Une base orthonormée est  $(\frac{1}{6}(5, 1, -1, 3))$ .

1.4. Est-ce que  $E^\perp$  est un sous-espace propre de  $M$  ? Pour quelle valeur propre ?

On calcule  $f(\vec{n})$  dans la base canonique à l'aide de la matrice  $M$ . On trouve  $26\vec{n}$ . D'autre part, la matrice  $M - 26I_4$  est de rang 3. L'espace propre de  $M$  associé à 26 est donc de dimension 1. C'est donc  $E^\perp$ .

**Remarque :** le théorème du cours qui compare la multiplicité d'une valeur propre à la dimension du sous-espace propre associé nous permet d'affirmer ici que  $3 = \dim E_{-10} \leq m(-10)$  et que  $1 \leq \dim E_{26} \leq m(26)$ . D'autre part, comme le polynôme caractéristique est de degré 4, on a  $m(-10) + m(26) \leq 4$ . On en déduit que  $3 = \dim E_{-10} = m(-10)$  et que  $1 = \dim E_{26} = m(26)$  et par suite que  $E_{26} = E^\perp$ .

1.5. Donner une base orthonormée de  $\mathbf{R}^4$  composée de vecteurs propres de  $M$ . On la désigne par  $\mathcal{B}'$ . Écrire la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}'$ .

La famille  $\mathcal{B}' := (\frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{17}}(3, 0, 0, 5), \frac{1}{6\sqrt{17}}(-5, 17, -17, 3), \frac{1}{6}(5, 1, -1, 3))$  est une famille orthonormée. Elle est donc libre. C'est une base orthonormée de  $\mathbf{R}^4$ . Elle est formée de vecteurs propres de  $f$  de valeurs propres respectives  $(-10, -10, -10, 26)$ . La matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}'$  est la matrice diagonale

$$D := \begin{pmatrix} -10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 26 \end{pmatrix}.$$

1.6. Écrire la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$ . Combien vaut son inverse ?

La matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$  est la matrice des coordonnées des vecteurs de  $\mathcal{B}'$  dans la base  $\mathcal{B}$ . C'est donc

$$P := \frac{1}{6\sqrt{17}} \begin{pmatrix} 0 & 9\sqrt{2} & -5 & 5\sqrt{17} \\ 3\sqrt{34} & 0 & 17 & 1\sqrt{17} \\ 3\sqrt{34} & 0 & -17 & -\sqrt{17} \\ 0 & 15\sqrt{2} & 3 & -3\sqrt{17} \end{pmatrix}$$

Comme les bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  sont orthonormées,  $P$  est une matrice orthogonale. Son inverse est sa transposée  ${}^tP$ . On a  $D = {}^tPMP$ . ou  $M = PD{}^tP$ .