

Feuille 6

Exercice 1. Soit l'application linéaire f de \mathbb{R}^3 dans lui-même définie par

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto (-z, x, y) \end{aligned}$$

Montrer que f est orthogonale. Calculer le déterminant de f . Montrer que $f = \rho \circ \sigma$ où ρ est une rotation dont on donnera l'axe D et σ la symétrie orthogonale par rapport au plan vectoriel $P = D^\perp$.

Exercice 2. Soit l'application linéaire f de \mathbb{R}^3 dans lui-même qui, dans la base canonique de \mathbb{R}^3 ,

a pour matrice $\begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Peut-on trouver une base de \mathbb{R}^3 dans laquelle la matrice de f soit diagonale? Peut-on trouver une base de \mathbb{R}^3 dans laquelle la matrice de f soit triangulaire?

Exercice 3. Soit une application linéaire f de \mathbb{R}^n dans lui-même qui, dans une base de \mathbb{R}^n , a pour matrice A .

a) Montrer que le polynôme $P_f(x) = \det(A - xI)$ ne dépend pas de la base choisie pour exprimer f (P_f est le polynôme caractéristique de f).

b) Soit l'application linéaire f de \mathbb{R}^2 dans lui-même et notons $P_f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$. Montrer le résultat suivant (Théorème de Cayley-Hamilton)

$$a_2(f \circ f) + a_1f + a_0I = 0$$

c) Généraliser cet énoncé lorsque f est une application linéaire de \mathbb{R}^3 dans lui-même et le démontrer

dans le cas où f est diagonalisable. Utiliser ce résultat pour calculer A^3 lorsque $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Exercice 4. Soit l'application linéaire f de \mathbb{R}^3 dans lui-même qui, dans la base canonique de \mathbb{R}^3 ,

a pour matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer le le polynôme caractéristique de f . Peut-on

trouver une base de \mathbb{R}^3 dans laquelle la matrice de f soit diagonale? Peut-on trouver une base de \mathbb{R}^3 dans laquelle la matrice de f soit triangulaire?

Exercice 5. On se donne deux réels a et b et on considère la suite de réels $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la donnée des deux premiers termes u_0 et u_1 et par

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \text{ pour } n \text{ entier.}$$

Pour n entier naturel, on considère le vecteur U_n de coordonnées (u_n, u_{n+1}) . Vérifier que pour

n entier naturel on a $U_{n+1} = AU_n$ où A est la matrice $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix}$. Exemple : la suite de

Fibonacci. Traiter le cas $a = 1, b = 1, u_0 = 1, u_1 = 1$. Trouver une base de \mathbf{R}^2 formée de vecteurs propres de A . Donner un équivalent de u_n quand n tend vers $+\infty$.

Exemple : traiter le cas $a = 1, b = -\frac{1}{4}, u_0 = 1, u_1 = 0$. Montrer qu'il existe un réel λ tel que la matrice $N = A - \lambda I_2$ vérifie $N^2 = 0$. Donner un équivalent de u_n quand n tend vers $+\infty$.