Feuille d'exercices 3

Exercice 1. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(k)$. On suppose que A et B sont nilpotentes et commutent. Montrer que $A+B$ et AB sont nilpotentes.

Exercice 2. Soient $a \in k$ et

$$M_a = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer $\lambda \in k$ tel que $N_a := M_a - \lambda I_3$ soit nilpotente. Puis, calculer M_a^r pour tout $r \geq 1$.

Exercice 3. Soit u l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(k)$ défini par :

$$u : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \end{array}.$$

1) Déterminer les valeurs et sous-espaces propres de u.

2) On suppose k de caractéristique nulle, par exemple, $k = \mathbf{R}$. Montrer que u est diagonalisable.

3) En est-il de même si k est de caractéristique 2 ?

Exercice 4. Soient : $k = \mathbf{R}$, E le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}[X]$ des polynômes de degré $< n$, et u l'endomorphisme de E défini par $u(P) = P + P'$. Montrer que le polynôme minimal de u est $(X-1)^n$.

Exercice 5. On prend $k = \mathbf{F}_2 = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. On considère l'espace vectoriel E des polynômes de degré au plus 1 sur k et l'endomorphisme F, dit de Frobenius, défini de la manière suivante : à un polynôme $P \in E$, on associe le reste de la division de $P(X)^2$ par $X^2 + X + 1$.
Vérifier que c'est bien un endomorphisme de E et déterminer sa matrice dans la base $(1, X)$ de E. Déterminer les sous-espaces stables (resp. fixes) par F. Déterminer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de F.

Dans les exercices qui suivent, on prend $k = \mathbf{C}$ ou $k = \mathbf{R}$.

Exercice 6 (**Normes sur** $\mathrm{End}(E)$).

6.1. On considère un espace vectoriel E de dimension finie n sur k, équipé d'une norme notée $\| \ \|$.
Pour u élément de $\mathrm{End}(E)$ on considère la quantité :

$$\sup_{\|x\|=1} \|u(x)\|$$

Dans le cours de *Topologie et calcul différentiel*, on a montré que c'est une norme sur l'algèbre $\mathrm{End}(E)$, notée également $\| \ \|$, qui vérifie de plus la propriété suivante :

$$\text{pour } u \text{ et } v \text{ dans } \mathrm{End}(E),\ \|u \circ v\| \leq \|u\| \|v\|.$$

On dit que la norme est sous-multiplicative.

6.2. Pour u dans $\mathrm{End}(k^n)$ de matrice A dans la base canonique de k^n, on pose

$$\|u\| = n \max_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}|$$

Vérifier que l'on définit ainsi une norme sous-multiplicative sur $\mathrm{End}(E)$.

Exercice 7 (**Exponentielle d'un endomorphisme**). On considère l'algèbre $\mathrm{End}(E)$ munie d'une norme sous-multiplicative. L'espace vectoriel $\mathrm{End}(E)$ muni de la norme en question est complet : toute suite de Cauchy d'éléments de E converge dans E (le démontrer ou se reporter au cours de Topologie et calcul différentiel).

7.1. Soit u un élément de $\mathrm{End}(E)$. Montrer que la série

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p\,!} u^p$$

est de Cauchy, donc convergente dans $\mathrm{End}(E)$. On note $\exp(u)$ la somme de cette série. Définir de manière analogue l'exponentielle d'une matrice de $\mathcal{M}_n(k)$ et relier les deux notions.

7.2. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(k)$. Exprimer $\exp(A)$ lorsque A est diagonale, lorsque A est nilpotente d'indice N, lorsque A est un bloc de Jordan de taille N et de valeur propre λ, enfin lorsque A est sous forme normale de Jordan. Dans ce dernier cas calculer le déterminant de l'exponentielle. En déduire que, pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(k)$, $\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{tr}(A))$.

7.3. Soit u et v deux endomorphismes qui commutent. Montrer que $\exp(u + v) = \exp(u) \circ \exp(v)$. En déduire que $\exp(u)$ est inversible et calculer son inverse.

7.4. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(k)$ et P une matrice inversible de $\mathrm{GL}_n(k)$. Comparer $\exp(A)$ et $\exp(P^{-1}AP)$.

7.5. On considère les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer AB, BA, $\exp(A)$, $\exp(B)$, $\exp(A)\exp(B)$, $\exp(B)\exp(A)$ et $\exp(A+B)$. Conclure.

7.6. Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer que l'application :

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \\ t & \longmapsto & \exp(tA) \end{array}$$

est dérivable en tout point de $\mathbf{R}$ et que sa dérivée en $t = 0$ est la matrice A.
Montrer ensuite que la fonction dérivée de $t \longmapsto \exp(tA)$ est la fonction

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \\ t & \longmapsto & A\exp(tA) = \exp(tA)A. \end{array}$$

Montrer que pour t et t' réels on a $\exp((t+t')A) = \exp(tA)\exp(t'A)$. En déduire que l'ensemble de matrices $\{\exp(tA) \mid t \in \mathbf{R}\}$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.

7.7. On prend ici $k = \mathbf{R}$ et $n = 2$. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Déterminer les puissances de A et $\exp(tA)$ pour t réel. Montrer que $t \longmapsto \exp(tA)$ est une application périodique et déterminer sa période. Calculer le déterminant de $\exp(tA)$ pour t réel.

Exercice 8. On choisit $k = \mathbf{C}$. Soit E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbf{C}$. Soit u un endomorphisme d'ordre fini de E, c'est-à-dire tel que $u^N = \mathrm{Id}$ pour un entier N non nul. Montrer que u est diagonalisable et que ses valeurs propres sont des racines de l'unité.
Exemple : voir feuille 1, exercice 6.