GT PROBABILITÉS ET STATISTIQUES.
SÉANCE 1.

EDP ET PROBABILITÉS : EFFET RÉGULARISANT ET SOLVABILITÉ D'UNE EDS.

F. DELARUE

Dans cet exposé, j'aborderai le lien entre la théorie des équations aux dérivées partielles et les équations différentielles stochastiques. Je me focaliserai sur deux points particuliers : l'effet régularisant du noyau de la chaleur d'une part, et la solvabilité d'une équation différentielle stochastique d'autre part. Précisément, j'essaierai d'expliquer l'effet régularisant à travers quelques propriétés élémentaires du calcul stochastique, avant de montrer en quoi l'effet régularisant favorise la solvabilité d'une équation différentielle stochastique. Je rappellerai à cette occasion le célèbre résultat de solvabilité faible dû à Stroock et Varadhan, que je tenterai de revisiter à travers la théorie (postérieure) des solutions de viscosité pour les EDP, initiée, entre autres, par Crandall, Ishii et Lions.

1. Introduction

L'exposé est motivé par une application concrète. Etant donné un modèle position–vitesse $2d$-dimensionnel, $d \geq 1$, de type stochastique

$$\begin{aligned} dX_t &= dV_t dt \\ dV_t &= b(X_t, U_t)dt + \sigma(X_t, U_t)dB_t, \end{aligned} \tag{1}$$

est-il possible d'exhiber des propriétés qualitatives génériques (i.e. sous des hypothèses assez générales) sur le système ?

Remarque : pareil modèle intervient également en mathématiques financières dans le problème du *pricing* des options asiatiques.

Exemple 1 : est-il possible donner des conditions raisonnables sous lesquelles le couple (U_t, V_t) admet une densité à chaque instant $t > 0$?
Intuitivement, il semble raisonnable d'impulser un bruit "non-dégénéré" dans le système, c'est à dire de supposer que la matrice σ est non-dégénéré. Il est alors attendu que l'agitation brownienne se transmette à la vitesse, puis à la position.

Exemple 2 : en cas d'existence d'une densité, est-il possible d'en contrôler la décroissance avec le temps et la décroissance en espace ? A titre d'exemple, est-il possible de la comparer à une densité gaussienne ?

Exemple 3 : avant de s'intéresser à l'éventuelle existence d'une densité, de même qu'à ses propriétés qualitatives, il est nécessaire de considérer le problème, plus simple, de l'unique solvabilité de l'équation. La condition dite de "non-dégénérescence" sur la matrice σ renvoie directement à la théorie de Stroock et Varadhan : peut-on, pour un système de la sorte, établir un résultat comparable ? (Il est à noter que le système ne vérifie pas les hypothèses de Stroock et Varadhan, puisque la dynamique de la deuxième composante est purement dégénérée.)

Objectif : l'objectif de l'exposé est de se focaliser sur la question 3. Il ne s'agira pas de traiter ce modèle exactement, mais de revenir sur les différentes formes de solvabilité d'une EDS, de comprendre en quoi l'hypothèse de "non-dégénérescence" favorise la résolution du problème et enfin d'ouvrir sur une piste générale permettant de généraliser, comme espéré, la théorie de Strook et Varadhan au problème (1).

2. Retour sur la solvabilité d'une EDS

Dans cette section, nous nous intéressons à la solvabilité d'une EDS de la forme

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t. \tag{2}$$

Ici, $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien de dimension d, et $b : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ et $\sigma : \mathbb{R}^d \to \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ (ensemble des matrices de taille d) sont des coefficients mesurables (et même, pour simplifier, continus). Il serait possible d'inclure une éventuelle dépendance en temps des coefficients : il s'agit d'une complication inutile pour l'exposé.

2.1. L'approche forte (brutale ?)

La technique de résolution certainement la plus simple consiste à résoudre (2) trajectoriellement en appliquant une variante du théorème de Cauchy-Lipschitz pour les équations différentielles ordinaires. Essentiellement, étant donnés un espace de probabilités muni d'un mouvement brownien $(B_t)_{t\geq 0}$ et des coefficients Lipschitziens, l'équation (2) admet une unique solution, adaptée à la trajectoire engendrée par $(B_t)_{t\geq 0}$.

2.2. Le lien avec les EDP.

Une autre approche consiste à chercher à tirer parti du lien qui existe entre l'équation (2) et les équations aux dérivées partielles dirigées par son générateur.

Pour comprendre ce que le mot "générateur" signifie, il suffit de revenir à la formule d'Itô. Considérons en effet une fonction u de classe $\mathcal{C}^{1,2}([0,+\infty) \times \mathbb{R}^d)$. En supposant que $(X_t)_{t\geq 0}$ est solution de (2), la dynamique infinitésimale de $(u(t,X_t))_{t\geq 0}$ s'écrit

$$\begin{aligned} du(t,X_t) = \Big(&\frac{\partial u}{\partial t}(t,X_t) + \sum_{i=1}^d b_i(X_t)\frac{\partial u}{\partial x_i}(t,X_t) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d a_{i,j}(X_t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(t,X_t)\Big)dt \\ &+ \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial u}{\partial x_i}(t,X_t)\sigma_{i,j}(t,X_t)dB_t^j, \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

où $a(x)$ désigne la matrice $\sigma(x)\sigma^*(x)$.

Ceci amène à définir un opérateur agissant sur les fonctions $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^d$ par

$$\big[\mathcal{L}\varphi\big](x) = \sum_{i=1} b_i(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d a_{i,j}(x)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}(x).$$

Il faut alors comprendre l'opérateur temps-espace (aussi appelé opérateur de Dynkin de l'équation (2)) $\partial_t + \mathcal{L}$ comme décrivant la dynamique infinitésimale des solutions de (2). En renversant le point de vue, il faut comprendre que les solutions de (2) apparaissent comme des "caractéristiques aléatoires" des équations aux dérivées partielles dirigées par (2).

Considérons en effet le problème (dit de Cauchy) sur $[0, +\infty) \times \mathbb{R}^d$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \mathcal{L}u(t, x) = 0, \tag{3}$$

avec pour condition au bord $u(0, x) = u_0(x)$. Si, pour une condition initiale u_0 donnée, il existe une fonction $\mathcal{C}^{1,2}$ sur $[0, +\infty) \times \mathbb{R}^d$ (la condition est un peu forte : une bonne idée serait de travailler sur l'ouvert) solution du problème (3), alors la formule d'Itô montre que, pour toute solution $(X_t)_{t\geq 0}$ de (2) avec une condition initiale $X_0 = x$,

$$du(T - t, X_t) = \sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial u}{\partial x_i}(t, X_t)\sigma_{i,j}(X_t)dB_t.$$

Si la partie martingale est intégrable, nous obtenons en choisissant $t = 0$ et en intégrant, $u(T, x) = \mathbb{E}[u_0(X_T)]$. Autrement dit, le long des solutions de (2), la solution est constante en espérance ! Il s'agit d'une extension de la théorie des caractéristiques pour le transport le long desquelles la solution d'une EDP d'ordre 1 est constante. En particulier, nous sommes capables de représenter la solution à l'instant T et au point ^{x} comme une espérance de la condition initiale contre la loi à l'instant T d'une solution de (2) intialisée à x.

Durant les années 70 s'est développée l'idée selon laquelle l'unique solvabilité des EDP de type (3) devait être reliée, d'une façon ou d'une autre à l'unique solvabilité de (2).

2.3. **Notion de solvabilité faible.** Il y a néanmoins un prix à payer pour connecter la solvabilité de (2) à la solvabilité de (3) : il faut comprendre que (3) ne fait référence à aucun mouvement brownien particulier. En particulier, la donnée *a priori* du mouvement brownien $(B_t)_{t\geq 0}$ comme dans l'approche forte apparaît inutile lorsque (2) est mis en relation avec (3).

Ceci conduit à la notion de solvabilité faible : il s'agit non plus de construire une solution de (2) sur un espace de probabilité donné, muni d'une filtration et d'un mouvement brownien mais, au contraire, de construire l'espace de probabilité (en particulier la mesure de probabilité) ainsi que le mouvement brownien comme une partie de la solution.

L'unicité trajectorielle perd de fait son sens puisque l'espace de probabilité peut varier avec la solution. L'unicité est de fait comprise en loi : il s'agit de comparer les lois induites par les solutions sur l'espace canonique des fonctions continues à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.

Definition 1. Etant donnée une condition initiale $x \in \mathbb{R}^d$, on appelle solution faible de l'EDS (2) tout quintuplet $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}, (B_t)_{t\geq 0}, (X_t)_{t\geq 0})$, $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ désignant un espace de probabilité vérifiant les conditions usuelles, $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien respectivement à $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ et $(X_t)_{t\geq 0}$ une solution $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ adaptée de l'EDS (2) vérifiant $\mathbb{P}\{X_0 = x\} = 1$. La solution est dite unique en loi si toute autre solution faible engendre la même marginale sur l'espace des fonctions continues.

2.4. **L'approche de Stroock et Varadhan.** La recherche d'un lien entre la solvabilité de (2) et celle de (3) a été popularisée par le travail de Stroock et Varadhan. La première idée de Stroock et Varadhan est de reformuler la notion de solution faible au simple travers de la notion de caractéristiques aléatoires. Il ne s'agit non plus de résoudre une équation différentielle stochastique, mais un problème de martingales :

Definition 2. Etant donné $\mathcal{W}^d$ l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}^d$, muni de la filtration cylindrique (ou canonique), on appelle solution du problème de martingales de condition initiale $x \in \mathbb{R}^d$ toute mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sous laquelle le processus canonique

$$\big(X_t : \omega \in \mathcal{W}^d \mapsto \omega(t)\big)_{t\geq 0}$$

vérifie $X_0 = x$ avec probabilité 1 et

$$\big(f(X_t) - \int_0^t (\partial_t + \mathcal{L})f(s, X_s)ds\big)_{t\geq 0}$$

est une martingale pour toute fonction f régulière à support compact.

L'intérêt de cette approche est manifeste : il n'est plus du tout fait référence à un mouvement brownien dans la définition des solutions. (Par ailleurs, l'espace canonique permet de bénéficier de propriétés topologiques.) Néanmoins, il est possible de vérifier que les deux définitions sont équivalentes. (L'existence au sens de la définition 1 est équivalente à celle au sens de la définition 2 ; de même pour l'unicité.)

2.5. **Comment aborder l'existence ?** La résolution du problème de martingales consiste en la construction d'une mesure sur l'espace des fonctions continues. Usuellement, il s'agit de procéder par compacité (ou tension selon le vocabulaire).

Théorème. Supposons les coefficients a et b bornés et continus, alors, pour tout point de départ $x \in \mathbb{R}^d$, le problème de martingales admet au moins une solution.

2.6. **Comment aborder l'unicité ?** L'unicité est probablement le problème le plus difficile (et aussi le plus intéressant). Naturellement, il est suffisant de montrer que les lois finis-dimensionnelles sont uniques. Autrement dit, il est suffisant de montrer que, étant données deux solutions aux problèmes de martingales $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$, pour tout $n \geq 1$, $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ et $f_1, \dots, f_n$ fonctions bornées (éventuellement régulières) sur $\mathbb{R}^d$:

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\big[\prod_{i=1}^n f_i(X_{t_i})\big] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\big[\prod_{i=1}^n f_i(X_{t_i})\big]. \tag{4}$$

En pensant à la propriété de Markov, nous comprenons que, d'une façon ou d'une autre, il pourrait être possible de se ramener au cas $n = 1$.

L'idée fondamentale est donnée par

Proposition 1. Supposons que pour tout point de départ x, pour toutes solutions $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ au problème de martingales avec x comme point de départ, pour tout $t > 0$ et toute fonction f bornée (éventuellement régulière) sur $\mathbb{R}^d$:

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\big[f(X_t)\big] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\big[f(X_t)\big],$$

alors, quelque soit le point de départ, le problème de martingales admet au plus une unique solution.

Idée de preuve. Il s'agit de prouver (4). La difficulté est l'absence de propriété de Markov ! (Il n'y pas d'unicité.) L'idée s'appuie sur un théorème de désintégration de la mesure (hors de portée ici). Essentiellement, pour $0 \leq s < t$, nous pouvons trouver une famille de mesures $(\mathbb{P}_\omega)_\omega$ (mesurable en ω) telle que

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\big[f(X_t)|\mathcal{F}_s\big] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}_\omega}[f(X_{t-s})] \quad \text{p.s.},$$

et, p.s., $\mathbb{P}_\omega$ est une solution du problème de martingales avec $X_s(\omega)$ comme condition initiale. □

Nous sommes maintenant capables de faire le lien avec la théorie des EDP. Rappelons en effet l'idée du paragraphe 2.2 : si jamais u est une solution classique de (3) avec pour condition initiale u_0 (avec un contrôle ad hoc de façon à pouvoir localiser proprement la martingale locale issue de la formule d'Itô) alors, pour $T > 0$, $u(T,x) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[u_0(X_T)]$ pour n'importe quelle solution $\mathbb{P}$ du problème de martingale issue de x. Autrement dit, si pour toute condition initiale bornée (et éventuellement régulière), nous sommes capables de construire une solution classique à gradient bien contrôlé de l'EDP, alors la Proposition 1 garantit l'unique solvabilité du problème de martingales (et de fait l'unique solvabilité faible de l'EDP). Naturellement, la formule d'Itô est ici directement donnée par la formulation martingale.

2.7. **Effet régularisant.** Pour que l'approche initiée dans le paragraphe précédent ait un sens, il est nécessaire d'exhiber des conditions suffisantes sur $a = \sigma\sigma^*$ et b pour résoudre l'EDP, quelle que soit la condition initiale u_0 bornée (et éventuellement régulière). Rappelons pour autant qu'il est inutile d'exhiber des conditions plus fortes que celles de type Lipschitz discutées dans la Section 1 : le caractère Lipschitz est en effet suffisant pour garantir l'existence et l'unicité forte.

Il s'agit de fait de travailler sous des hypothèses plus faibles que celles de type Lipschitz, mais d'espérer malgré tout une solution possédant des dérivées d'ordre deux. Dit autrement, nous espérons un effet régularisant de l'EDP : la solution cherchée doit être plus régulière que les données initiales (ou encore que les coefficients initiaux).

L'exemple d'hypothèse typique pour espérer un tel effet est la non-dégénérescence discutée en introduction : le spectre de la matrice $a(x)$ est supposé minoré, pour tout x, par une constante (uniforme en x) strictement positive.

La compréhension de l'effet régularisant a nourri de nombreux travaux, tant dans la littérature consacrée à l'analyse des équations aux dérivées partielles que dans celle consacrée à l'analyse stochastique. Les allers et retours entre les deux approches sont d'ailleurs très fréquents. L'exemple le plus frappant d'effet régularisant est celui du noyau gaussien.

Lorsque $b = 0$ et σ est l'identité, l'équation (2) est en effet trivialement résolue : les solutions sont données par le mouvement brownien lui-même. La connexion avec l'EDP (3) s'écrit simplement $u(T,x) = \mathbb{E}[u_0(x + B_T)]$, i.e.

$$u(T,x) = (2\pi T)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} u_0(y) \exp\big(-\frac{|x-y|^2}{2T}\big) dy.$$

Nous comprenons que la solution au temps T est $\mathcal{C}^\infty$ (et même analytique) sous les bonnes hypothèses de croissance sur u_0 (par exemple bornée comme dans les exemples précédents), et ce indépendamment de la régularité de u_0.

Cet exemple est frappant. Pour autant, l'effet de régularisation exhibée porte sur la condition au bord et non sur les coefficients. Il se trouve la phénomène de régularisation de la condition au bord se propage en réalité aux coefficients. Il est par exemple possible de montrer que

Théorème. Si les coefficients a et b sont bornées et Hölder continus et si a est uniformément non-dégénéré, alors, pour toute condition initiale u_0 de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact, l'EDP admet une solution classique $\mathcal{C}^{1,2}$, à dérivées bornées.

Il est possible de revenir sur ce phénomène de propagation dans des séances ultérieures. Pour le moment, bornons nous à citer le résultat de Stroock et Varadhan

Théorème. Supposons les coefficients a et b bornés et continus et a uniformément non-dégénérée, alors, pour tout point de départ $x \in \mathbb{R}^d$, le problème de martingales admet une unique solution.

Soulignons que le théorème de Girsanov permet dans ce cadre précis de s'affranchir de l'hypothèse de continuité sur b.

Nous ne mentionnerons par la connexion avec un résultat d'EDP pour le moment. Le lien est trop difficile avec détailler ici.

3. Lien avec les solutions de viscosité

La théorie des solutions de viscosité a été introduite par Crandall, Evans, Ishii et Lions. Elle permet de donner un sens à la notion de solution en l'absence même de dérivées : ceci est particulièrement utile pour les équations non-linéaires lorsque la théorie des distributions ne s'applique pas.

L'idée ici est de montrer que l'unicité au problème de martingales est en fait une conséquence du principe de comparaison pour les sous- et sur- so lutions de viscosité de l'équation (3). Nous reviendrons en fin d'exposé sur la notion de principe de comparaison : mentionnons simplement qu'une littérature abondante existe sur le sujet, à même par exemple de s'appliquer à l'exemple (1) donné en introduction.

L'idée de cette section est simple : il s'agit de partir du problème de martingales et d'arriver progressivement au lien avec les solutions de viscosité. La définition sera donnée à ce moment-là : elle n'en semblera que plus naturelle.

3.1. **Quel(s) candidat(s) pour résoudre l'EDP** (3) **?** Rappelons le problème : il s'agit d'appliquer la Proposition 1.

Rappelons également la relation $u(T,x) = \mathbb{E}[u_0(X_T)]$ donnée dans la Sous-section 2.2, u_0 désignant une fonction sur $\mathbb{R}^d$ jouant le rôle de condition au bord.

Nous comprenons qu'il s'agit, à partir des solutions du problème de martingales, de construire une solution (dans un sens à préciser) à l'EDP (3).

Pour un point de départ x donné et une échéance T fixée, il y a autant de candidats solution à l'EDP que de quantités de la forme $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[u_0(X_T)]$, $\mathbb{P}$ désignant une solution au problème de martingales démarrant de x. Un point de vue naturel consiste à se focaliser sur le sup et l'inf des valeurs possibles, c'est-à-dire

$$\underline{u}(t,x) = \inf\big\{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[u_0(X_t)], \quad \mathbb{P} \in \mathcal{M}(x)\big\}$$
$$\overline{u}(t,x) = \sup\big\{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[u_0(X_t)], \quad \mathbb{P} \in \mathcal{M}(x)\big\}.$$

Ici, $\mathcal{M}(x)$ désigne les solutions au problème de martingales issu de x.

Il est clair que les deux quantités sont bornées par $\|u_0\|_\infty$. De plus

$$-\|u_0\|_\infty \le \underline{u}(t,x) \le \overline{u}(t,x) \le \|u_0\|_\infty.$$

3.2. **Connexion avec le problème de martingales.** Nous comprenons que $\underline{u}$ désigne une "plus petite valeur possible" pour la solution. Examinons ce que cela signifie d'être en dessous de la "plus petite valeur possible". Considérons de fait une fonction $\varphi : [0,+\infty) \times \mathbb{R}^d$ de classe $\mathcal{C}^{1,2}$ (à dérivées bornées) telle que

$$\forall (s,y) \in [0,+\infty) \times \mathbb{R}^d, \quad \varphi(s,y) \le \underline{u}(s,y).$$

Pour comprendre précisément ce qui se passe au point (t,x), supposons que φ "touche" $\underline{u}$ au point (t,x).

Considérons maintenant une solution $\mathbb{P}$ au problème de martingale partant de x et fixons maintenant $s < t$. Nous pouvons écrire, pour tout ω,

$$\varphi(t-s, X_s(\omega)) \le \underline{u}(t-s, X_s(\omega)) \le \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[u_0(X_{t-s})],$$

pour n'importe quelle solution au problème de martingales démarrant de $X_s(\omega)$ à l'instant $t-s$.

La bonne idée est de choisir $\mathbb{Q} = \mathbb{P}_\omega$, version régulière de la désintégration de $\mathbb{P}$ par rapport à $\mathcal{F}_s$: nous savons en effet que $\mathbb{P}_\omega$ est, pour presque tout ω, une solution au problème de martingales partant de $X_s(\omega)$. Alors, p.s.

$$\varphi(t-s, X_s(\omega)) \le \underline{u}(t-s, X_s(\omega)) \le \mathbb{E}^{\mathbb{P}_\omega}[u_0(X_{t-s})] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[u_0(X_t)|\mathcal{F}_s],$$

En prenant l'espérance, nous obtenons, pour tout $s < t$

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\big[\varphi(t-s, X_s)\big] \le \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[u_0(X_t)].$$

L'intérêt d'avoir choisi φ de classe $\mathcal{C}^{1,2}$ (à dérivées bornées) est de pouvoir appliquer la formulation martingale. (Il est possible de passer des fonctions définies en espace seulement aux fonctions définies en espace–temps.) Il vient

$$\varphi(t,x) \le \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \int_0^{t-s} [(-\partial_t + \mathcal{L})\varphi](t-r, X_r)dr \le \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[u_0(X_t)].$$

Rappelons maintenant que $\varphi(t,x) = \underline{u}(t,x)$, de sorte que

$$\underline{u}(t,x) + \inf_{\mathbb{P} \in \mathcal{M}(x)} \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \int_0^{t-s} [(-\partial_t + \mathcal{L})\varphi](t-r, X_r)dr \le \inf_{\mathbb{P} \in \mathcal{M}(x)} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[u_0(X_t)] = \underline{u}(t,x).$$

Finalement, pour tout $0 < s < t$,

$$\inf_{\mathbb{P} \in \mathcal{M}(x)} \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \int_0^{t-s} [(-\partial_t + \mathcal{L})\varphi](t-r, X_r)dr \le 0.$$

3.3. **Retour à l'EDP.** Supposons pour simplifier que les coefficients a et b sont bornées. Alors,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{\mathbb{P}\in\mathcal{M}(x)} \mathbb{P}\big\{ \sup_{0\le r\le\varepsilon} |X_r - x| > \varepsilon^{1/4}\big\} = 0.$$

De fait, en choisissant $s = t-\varepsilon$, avec $\varepsilon > 0$ petit, pour tout $\mathbb{P}\in\mathcal{M}(x)$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}^{\mathbb{P}} \int_0^{\varepsilon} [(-\partial_t + \mathcal{L})\varphi](t-r, X_r)dr \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\Big[\mathbf{1}_{\{\sup_{0\le r\le\varepsilon}|X_r - x|\le\varepsilon^{1/4}\}} \int_0^{\varepsilon} [(-\partial_t + \mathcal{L})\varphi](t-r, X_r)dr\Big] \\
&\quad + \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\Big[\mathbf{1}_{\{\sup_{0\le r\le\varepsilon}|X_r - x|>\varepsilon^{1/4}\}} \int_0^{\varepsilon} [(-\partial_t + \mathcal{L})\varphi](t-r, X_r)dr\Big] \\
&\ge \varepsilon\mathbb{P}\big\{ \sup_{0\le r\le\varepsilon} |X_r - x| \le \varepsilon^{1/4}\big\} \inf_{t-\varepsilon\le s\le t, |y-x|\le\varepsilon^{1/4}} [(-\partial_t + \mathcal{L})\varphi](s,y) \\
&\quad - \varepsilon\mathbb{P}\big\{ \sup_{0\le r\le\varepsilon} |X_r - x| > \varepsilon^{1/4}\big\} \|(-\partial_t + \mathcal{L})\varphi\|_\infty \\
&\ge \varepsilon \inf_{t-\varepsilon\le s\le t, |y-x|\le\varepsilon^{1/4}} [(-\partial_t + \mathcal{L})\varphi](s,y) \\
&\quad - 2\varepsilon\mathbb{P}\big\{ \sup_{0\le r\le\varepsilon} |X_r - x| > \varepsilon^{1/4}\big\} \|(-\partial_t + \mathcal{L})\varphi\|_\infty.
\end{aligned}$$

En divisant par ε et en prenant l'inf sur $\mathbb{P}\in\mathcal{M}(x)$, puis en faisant tendre ε vers 0, nous obtenons

$$\big(-\partial_t + \mathcal{L}\big)\varphi(t,x) \le 0,$$

soit encore (en remettant tout dans le bon sens)

$$\big(\partial_t - \mathcal{L}\big)\varphi(t,x) \ge 0.$$

Ceci n'est rien d'autre que la définition d'une sur-solution de viscosité :

Définition. Soit v une fonction semicontinue inférieurement (i.e. $\liminf_{(s,y)\to(t,x)} v(s,y) \ge v(t,x)$) sur $[0,+\infty)\times\mathbb{R}^d$. Elle est dite sursolution de viscosité de $\partial_t - \mathcal{L}$ si, pour tout $(t,x)\in(0,+\infty)\times\mathbb{R}^d$ et pour toute fonction $\mathcal{C}^2$ sur $(0,T)\times\mathbb{R}^d$,

$$(\partial_t - \mathcal{L})\varphi(t,x) \ge 0$$

si $v-\varphi$ admet un minimum (global) en (t,x).

Nous remarquons ici l'introduction d'une condition de semi-continuité, usuelle des solutions de viscosité pour lesquelles un minimum de régularité est nécessaire. A priori, ici $\underline{u}$ n'est pas semi-continue inférieure : nous pourrions légèrement modifier sa définition pour qu'elle le soit. Nous ne le ferons pas.

Une étude similaire montrerait que $\overline{u}$ est sur-solution de viscosité (à la semi-continuité près), i.e. $-\overline{u}$ est une sous-solution.

3.4. **Principe de comparaison.** Nous remarquons que $\underline{u}(0,x) = \overline{u}(0,x) = u_0(x)$. Nous dirons que le principe de comparaison est vérifié si

Définition. Etant données u une sur-solution semi-continue inférieurement et v une sous-solution semi-continue supérieurement, $\sup_{t\geq 0, x\in\mathbb{R}^d}[v(x) - u(x)] \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^d}[v(0,x) - u(0,x)]$.

Conclusion : lorsque le principe de comparaison est vérifié, alors $\underline{u} = \overline{u}$. De sorte, que toutes les valeurs de $\mathbb{E}^P[u_0(X_t)]$, $\mathbb{P}$ décrivant $\mathcal{M}(x)$ sont égales : à l'aide de la Proposition 1, ceci montre que le problème de martingales admet au plus une unique solution.

3.5. **Exemples.** Voici quelques exemples tirés du papier de Ishii et Lions :

Exemple 1. Si les coefficients sont Lipschitziens, alors le principe de comparaison est vérifié.

Exemple 2. Si éléments des matrices $(a_{i,j}(x))_{1\leq i,j\leq n}$ sont nuls pour i,j supérieurs à certain k (uniforme en x) et si la sous-matrice $(a_{i,j}(x))_{1\leq i,j\leq k}$ est uniformément non-dégénéré est θ-Hölder continu, avec $\theta > 1/2$, alors le principe de comparaison est vérifié. Cet exemple peut s'appliquer au système donné en introduction.

Fin provisoire...